

Beiträge zur Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen am Kegel elliptischen Querschnitts

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktor-Ingenieurs
der

Fakultät für Elektrotechnik
an der Ruhr-Universität Bochum

von
Gerhard Kahl
Herne

Bochum 1988



Beiträge zur Theorie der Beugung
elektromagnetischer Wellen am
Kegel elliptischen Querschnitts

Digitized by the Internet Archive
in 2026

Beiträge zur Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen am Kegel elliptischen Querschnitts

DISSERTATION

zur Erlangung des Grades eines
Doktor-Ingenieurs
der
Fakultät für Elektrotechnik
an der Ruhr-Universität Bochum

von

Gerhard Kahl
Herne

Bochum 1988

Dissertation eingereicht am: 14. April 1988

Tag der mündlichen Prüfung: 29. Juni 1988

Referent: Prof. Dr. S. Blume

Korreferent: Prof. Dr. P. Edenhofer

Inhalt

	Häufig benutzte Formelzeichen	5
1	Einleitung	7
2	Das System der elliptischen Kegelkoordinaten	10
2.1	Geometrie der untersuchten Randwertprobleme	10
2.2	Vektoren und Differentialoperatoren in elliptischen Kegelkoordinaten	19
3	Darstellung elektromagnetischer Wellenfelder in elliptischen Kegelkoordinaten	24
3.1	Partikulärlösungen der quellenfreien Maxwellschen Gleichungen	25
3.2	Eigenschaften des Transversalanteils der Lösungsfunktionen	35
3.3	Die Integraldarstellung des elektromagnetischen Feldes	42
3.4	Die Greensche Dyade des elliptischen Kegels	53
4	Anwendungen der Lösung der Maxwellschen Gleichungen bei Randwertproblemen mit elliptischer Kegelgeometrie	67
4.1	Feldsingularitäten an der Spitze des elliptischen Kegels	67
4.2	Das Feld eines Hertzschen Dipols vor einem elliptischen Kegel	76
4.3	Das Strahlungsfeld eines Ringstromes vor einem elliptischen Kegel	93
4.4	Der elliptische Kegel als Aperturstrahler	100
5	Untersuchungen zur Beugung einer ebenen, elektromagnetischen Welle an einem elliptischen Kegel	115
5.1	Herleitung einer strengen Lösung des Beugungsproblems	115
5.2	Zur Beugung einer paraxial einfallenden ebenen Welle an einem Kreiskegel	123

5.3	Berechnung des Radarrückstreuquerschnittes eines semi-infiniten Kegels elliptischen Querschnitts	132
5.4	Die physikalisch optische Näherung für den Radarrückstreuquerschnitt des elliptischen Kegels	142
5.5	Anmerkungen zur Beugung einer ebenen Welle an einem elliptischen Kegel endlicher Länge	147
A1	Herleitung der benutzten Operatorbeziehungen	160
A2	Berechnung der Laméschen Funktionen bei vorgegebenen Randbedingungen auf dem Kegelmantel	169
A2.1	Die periodischen Laméschen Funktionen	169
A2.2	Die nicht-periodischen Laméschen Funktionen	174
A2.3	Bestimmung der Eigenwerte des Randwertproblems	176
A3	Lamésche Polynome	183
A4	Der Zusammenhang zwischen Laméschen Polynomen und Kugelflächenfunktionen	188
A5	Herleitung einer Integralbeziehung zwischen den sphärischen Besselfunktionen und Legendrefunktionen	193
	Zusammenfassung	199
	Lebenslauf	209

Abbildungsverzeichnis

2.1.1	Geometrie der untersuchten Randwertprobleme	11
2.1.2	Beschreibung des Kegels in elliptischen Kegelkoordinaten . .	12
2.1.3	Hauptöffnungswinkel eines elliptischen Kegels	14
2.1.4	Definitionsbereich der elliptischen Kegel	15
2.1.5	Bereichseinteilung der Ebene $x = 0$	18
3.3.1	Lösungsgebiet eines Randwertproblems	43
3.3.2	Berandung des Lösungsgebietes	48
4.1.1	Eigenwert des singulären E-Moden	72
4.1.2	Elektrische Feldlinien des singulären E-Moden	73
4.1.3	Eigenwert des singulären H-Moden (Fkts.-typ II)	74
4.1.4	Eigenwert des singulären H-Moden (Fkts.-typ IV)	74
4.1.5	Magnetische Feldlinien der singulären H-Moden	75
4.2.1	Stromdichteverteilung vor einem elliptischen Kegel	76
4.2.2	Dipol vor einem elliptischen Kegel	77
4.2.3	Dipol auf der z -Achse in z -Richtung ($r_0/\lambda_0 = 0.1$)	83
4.2.4	Dipol auf der z -Achse in z -Richtung ($r_0/\lambda_0 = 0.5$)	84
4.2.5	Dipol auf der z -Achse in z -Richtung ($r_0/\lambda_0 = 1.0$)	85
4.2.6	Dipol auf der $-x$ -Achse in z -Richtung ($r_0/\lambda_0 = 0.01$)	86
4.2.7	Dipol auf der $-x$ -Achse in z -Richtung ($r_0/\lambda_0 = 0.1$)	87
4.2.8	Dipol auf der $-x$ -Achse in z -Richtung ($r_0/\lambda_0 = 0.5$)	88
4.2.9	Dipol auf der $-x$ -Achse in z -Richtung ($r_0/\lambda_0 = 1.0$)	89
4.2.10	Dipol vor Sektor auf d. $-x$ -Achse in z -Richtg. ($r_0/\lambda_0 = 0.01$)	90
4.2.11	Dipol vor Sektor auf d. $-x$ -Achse in z -Richtg. ($r_0/\lambda_0 = 0.1$)	91
4.2.12	Dipol vor Sektor auf d. $-x$ -Achse in z -Richtg. ($r_0/\lambda_0 = 0.5$)	92
4.3.1	Kreisstrom vor einem elliptischen Kegel	93
4.3.2	Fernfeld, Kreisstrom vor elliptischem Kegel ($r_0/\lambda_0 = 0.1$) . .	97
4.3.3	Fernfeld, Kreisstrom vor elliptischem Kegel ($r_0/\lambda_0 = 0.5$) . .	98
4.3.4	Fernfeld, Kreisstrom vor elliptischem Kegel ($r_0/\lambda_0 = 1.0$) . .	99

4.4.1	Der elliptische Kegel als Aperturstrahler	100
4.4.2	Schlitzgespeister elliptischer Kegel bzw. Sektor	103
4.4.3	Fernfeld, schlitzgespeister elliptischer Kegel $r_0/\lambda_0 = 0.1$. . .	105
4.4.4	Fernfeld, schlitzgespeister elliptischer Kegel $r_0/\lambda_0 = 0.5$. . .	106
4.4.5	Fernfeld, schlitzgespeister elliptischer Kegel $r_0/\lambda_0 = 1.0$. . .	107
4.4.6	Fernfeld, schlitzgespeister Sektor $r_0/\lambda_0 = 0.1$	108
4.4.7	Fernfeld, schlitzgespeister 90°-Sektor	109
4.4.8	Strahlungsadmittanz, schlitzgespeister Kegel	113
4.4.9	Strahlungsadmittanz, schlitzgespeister Sektor	114
5.1.1	Beugung einer ebenen Welle am elliptischen Kegel	116
5.1.2	Zur Ausbreitungsrichtung der ebenen Welle	118
5.2.1	Beugung einer ebenen Welle an einem Kreiskegel	123
5.3.1	Beugung einer ebenen Welle am elliptischen Kegel	132
5.3.2	Rückstreuquerschnitt eines semi-infiniten, ellipt. Kegels . .	140
5.3.3	Rückstreuquerschnitt eines semi-infiniten Sektors	141
5.4.1	Beugung einer ebenen Welle am elliptischen Kegel	143
5.4.2	Physikalisch optischer Radarrückstreuquerschnitt	146
5.5.1	Beugung an einem elliptischen Kegel endlicher Länge	148
5.5.2	Aufteilung des Lösungsgebietes	149
5.5.3	Rückstreuquerschnitt des endlichen elliptischen Kegels . . .	158
A2.1.1	Eigenwertkurven zu Funktionstyp I	171
A2.1.2	Periodische Lamésche Funktionen	172
A2.3.1	Verteilung der Eigenwerte in der (ν, λ) -Ebene	177
A2.3.2	Nicht-periodische Lamésche Funktionen	178

Häufig benutzte Formelzeichen

Allgemeine Größen

j	- Imaginäre Einheit	
ω	- Kreisfrequenz	
κ	- Wellenzahl	
λ_0	- Freiraumwellenlänge	
J	- Stromdichte	
E	- Elektrische Feldstärke	
H	- Magnetische Feldstärke	
μ	- Permeabilität	
ϵ	- Dielektrizitätszahl	
σ	- Radarrückstreuquerschnitt	Gl. 5.2.23
Z_0	- Wellenwiderstand des freien Raumes	

Geometrie Größen

x, y, z	- Kartesische Koordinaten	
r, ϑ, φ	- Elliptische Kegelkoordinaten	Gl. 2.1.1
$r, \bar{\vartheta}, \bar{\varphi}$	- Kugelkoordinaten	Gl. 2.1.6
k, k'	- Systemparameter der elliptischen Kegelkoordinaten	Gl. 2.1.1
$\alpha_{min}, \alpha_{max}$	- Extreme Halböffnungswinkel des elliptischen Kegels	Gl. 2.1.4, 2.1.4
s_ϑ, s_φ	- Normierte Skalierungsfaktoren	Gl. 2.2.3
$\mathbf{e}_i$	- Einheitsvektoren	
$\mathbf{r}, \mathbf{r}'$	- Aufpunkts- und Quellpunktsvektor	
∇	- Nabla-Operator	Gl. 2.2.4

Funktionsbezeichnungen

$\mathbf{M}, \mathbf{N}$	- Lösungen der homogenen, vektoriellen Helmholtzgleichung	Gl. 3.1.3, 3.1.6
$\mathbf{m}, \mathbf{n}$	- Transversalanteile der vektoriellen Wellenfunktionen	Gl. 3.1.5, 3.1.7
Ψ	- Lösung der homogenen, skalaren Helmholtzgleichung	Gl. 3.1.9
$j_\nu(\kappa r)$	- Sphärische Besselfunktionen	
$h_\nu^{(2)}(\kappa r)$	- Sphärische Hankelfunktionen	
2. Art		
$Y_\nu(\vartheta, \varphi)$	- Transversalanteil der skalaren Wellenfunktionen	Kap. 3.2
$\Phi_\nu(\varphi)$	- Periodische Lamésche Funktion	Anhang 2.1
$\Theta_\nu(\vartheta)$	- Nicht-periodische Lamésche Funktion	Anhang 2.2
p_i	- Eigenwert zur Dirichlet-Bedingung	Gl. 3.2.10
q_i	- Eigenwert zur v. Neumann-Bedingung	Gl. 3.2.11
$\mathbb{L}(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$	- Dyadische Greensche Funktion	Kap. 3.3
$\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$	- Diracsche Deltafunktion	

1 Einleitung

Theoretische Untersuchungen zu Beugungsproblemen der Elektrodynamik finden zunehmend Anwendung bei der Konzipierung nachrichtentechnischer Systeme, bei denen die Ausbreitung elektromagnetischer Wellen in einer störenden Umgebung das Systemverhalten bestimmt ([55]). Die für die Analyse solcher Systeme notwendige Berechnung von Beugungsfeldern komplizierter Streukörper ist in den meisten Fällen nur mit Hilfe numerischer Verfahren, wie beispielsweise der geometrischen Theorie der Beugung, möglich. Diese Verfahren beruhen allerdings in der Regel auf einer asymptotischen Auswertung mathematisch strenger Lösungen sogenannter kanonischer Probleme der Beugungstheorie.

Darunter versteht man idealisierte beugungstheoretische Probleme, die aufgrund der einfachen Geometrie des vorgegebenen Streukörpers einer strengen mathematischen Behandlung zugänglich sind. Eine Zusammenstellung verschiedener solcher Probleme und der zugehörigen Lösungen findet man in [21]. Dort wird unter anderem das Problem der Beugung skalarer und elektromagnetischer Wellen an einem Kegel mit kreisförmigem Querschnitt behandelt.

In der vorliegenden Arbeit befassen wir uns mit dem allgemeineren Problem der Beugung elektromagnetischer Wellen an einem Kegel elliptischen Querschnitts. Das Problem der Beugung an einem Kreiskegel wird dabei, genau wie das der Beugung an einer sektorförmigen Fläche, als Spezialfall der allgemeineren Theorie mit erfaßt.

Das Beugungsfeld des elliptischen Kegels kann für beliebige, vorgegebene Quellenverteilungen mit Hilfe einer problemangepaßten tensoriellen Greenschen Funktion als Integral über die Quellen und Randwerte des Feldes dargestellt werden. Den Greenschen Tensor bestimmt man hier zweckmäßig aus einer speziellen Lösung der vektoriellen Helmholtzgleichung mit delta-funktionsförmiger Inhomogenität. Die Bestimmung dieser speziellen Lösung stellt sich mathematisch als eine vektorielle Randwertaufgabe dar, die zunächst auf ein skalares Randwertproblem zurückgeführt wird. Dieses skalare Problem kann dann mittels Variablenseparation gelöst werden. Man erhält so letztlich eine Reihenentwicklung des Greenschen Tensors nach dyadischen Vektorprodukten, weshalb wir in der Folge den Begriff der dyadischen Greenschen Funktion bzw. der Greenschen Dyade verwenden werden.



Bei dieser Vorgehensweise wird deutlich, daß das Problem der Beugung elektromagnetischer Wellen an einem elliptischen Kegel eng verknüpft ist mit dem entsprechenden skalaren Beugungsproblem. Letzteres wurde erstmals von Kraus und Levine ([38],[39]) behandelt, die die skalare Greensche Funktion des elliptischen Kegels als Reihenentwicklung nach Laméschen Funktionen dargestellt haben. Erste Auswertungen zu dieser skalaren Theorie findet man in den Arbeiten von Blume und Kirchner ([4],[6],[8],[9],[19],[35],[36]). Im Zusammenhang mit diesen Untersuchungen wurde auch eine Theorie zur Lösung des elektromagnetischen Beugungsproblems entwickelt ([10],[36]). Etwa in die gleiche Zeit fallen Untersuchungen von Satterwhite ([52],[53]) zur Theorie der Greenschen Dyade einer sektorförmigen Fläche. Dort sind auch Berechnungen des Feldes eines Hertzischen Dipols vor einem Sektor vorgestellt.

Bei den Untersuchungen in diesen Arbeiten hat sich herausgestellt, daß das Fehlen eines effizienten Verfahrens zur Berechnung der Eigenwerte und Eigenfunktionen der Lámeschen Differentialgleichungen die Anwendbarkeit der Theorie einschränkt. Dasselbe gilt auch für die Arbeiten von Sahalos, Thiele und Vafiadis ([50],[51],[60],[61],[63],[70]), in denen ebenfalls das elektromagnetische Beugungsproblem behandelt wird. Ein wesentlicher Fortschritt wurde hier durch die Arbeiten von Jansen [34] und diejenigen von Blume und Grafmüller ([12],[13],[28],[29]) erzielt, in denen Antennenprobleme mit elliptischer Kegelgeometrie untersucht werden. Die dort vorgestellten Verfahren zur Lösung der Laméschen Differentialgleichungen stellen eine für die Auswertung der Theorie wesentliche Erweiterung der von Ince ([31],[32]) und Erdelyi ([23],[24],[25]) entwickelten Lösungstheorie dar. Diese Theorie zur Berechnung der Laméschen Funktionen und ihrer Eigenwerte kann auch bei der Lösung des Beugungsproblems verwendet werden.

Bei der Lösung des Problems der Beugung elektromagnetischer Wellen an einem Kegel elliptischen Querschnitts geht man zweckmäßig von den Grundlösungen der quellenfreien Maxwell'schen Gleichungen in elliptischen Kegelkoordinaten aus. Wir werden uns deshalb, nach einem einführenden Kapitel zur Geometrie der untersuchten Randwertprobleme und ihrer Beschreibung in elliptischen Kegelkoordinaten, zunächst mit der Lösung der quellenfreien Maxwell'schen Gleichungen in diesem Koordinatensystem befassen. In einem weiteren Abschnitt diskutieren wir die wichtigsten Eigenschaften der Lösungsfunktionen der skalaren Helmholtzgleichung, die in diesem Zusam-

menhang benötigt werden. Eine Integraldarstellung der Lösung der quellen-behafteten Maxwell'schen Gleichungen kann dann mit Hilfe der tensoriellen Greenschen Funktion des Problems aufgestellt werden. Aus Gründen der Übersichtlichkeit geben wir hier zunächst nur diese Integraldarstellung und die Reihenentwicklung der Greenschen Dyade an. Eine Herleitung dieser Reihenentwicklung erfolgt in einem gesonderten Abschnitt.

Mit Hilfe der so gewonnenen Lösung der Maxwell'schen Gleichungen werden dann verschiedene Randwertprobleme elliptischer Kegelgeometrie behandelt. Dabei befassen wir uns zunächst mit der Singularität des elektromagnetischen Feldes an der Spitze des Kegels. Desweiteren werden das Beugungsfeld eines Hertz'schen Dipols vor einem elliptischen Kegel, sowie das Feld eines Kreisstromes um die Kegelspitze und das einer schlitzförmigen Apertur auf dem Kegelmantel berechnet.

Die angeführten Beugungsprobleme sind dadurch gekennzeichnet, daß die Quellen des elektromagnetischen Feldes in einem endlichen Abstand von der Kegelspitze lokalisiert sind. Läßt man nun die Feldquellen ins Unendliche rücken, so fällt auf den Kegel eine ebene elektromagnetische Welle ein. Verfahren zur Berechnung des Streufeldes, das durch die Beugung dieser ebenen Welle an einem semi-infiniten elliptischen Kegel erzeugt wird, werden in dem letzten Kapitel vorgestellt. Das Beugungsproblem wird dort sowohl mit Hilfe einer strengen Theorie als auch in physikalisch optischer Näherung behandelt. Den Abschluß bilden dann Untersuchungen zur Beugung einer ebenen Welle an einem elliptischen Kegel endlicher Länge. Dieses Problem kann hier allerdings nur für sehr kleine Kegellängen behandelt werden.

2 Das System der elliptischen Kegelkoordinaten

2.1 Geometrie der untersuchten Randwertprobleme

Unser Ziel ist es, elektromagnetische Beugungs- bzw. Abstrahlungsprobleme zu behandeln, bei denen das zu berechnende Feld auf der Mantelfläche eines elliptischen Kegels bestimmte, vorgegebene Randwerte annimmt. Diese Randwerte sind durch die jeweilige physikalische Problemstellung festgelegt. Zur Verdeutlichung seien hier zwei Beispiele angeführt, die im Verlauf der Arbeit behandelt werden.

Das erste Problem ist das der Beugung einer elektromagnetischen Welle an einem semi-infiniten, elektrisch ideal leitenden Kegel mit elliptischem Querschnitt (Abb. 2.1.1 a)). Die einfallende Welle werde dabei durch eine eingeprägte Stromdichteverteilung $\mathbf{J}$ erzeugt, die außerhalb des Kegels lokalisiert ist. Als Randbedingung muß hier gefordert werden, daß die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke auf dem Rand verschwindet.

Bei dem zweiten Beispiel (Abb. 2.1.1 b)) wird der elliptische Kegel als Aperturstrahler betrachtet. Hier ist als Randbedingung die Tangentialkomponente des elektrischen Feldes in einer Apertur auf dem Kegelmantel vorgegeben. Auf dem Rest des Kegelmantels muß diese Feldkomponente wieder identisch verschwinden.

Beide vorgestellten Randwertprobleme können mit Hilfe ein- und derselben dyadischen Greenschen Funktion gelöst werden. Dabei erweist es sich als zweckmäßig, die Greensche Dyade in einem Koordinatensystem darzustellen, das der elliptischen Kegelgeometrie angepaßt ist, weil dann die vorgegebenen Randbedingungen einfach formuliert werden können.

Ein solches System bilden die elliptischen Kegelkoordinaten r, ϑ und φ , deren Zusammenhang mit kartesischen Koordinaten gegeben ist durch

$$\begin{aligned}x &= r \sin \vartheta \cos \varphi \\y &= r \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \vartheta} \sin \varphi \\z &= r \cos \vartheta \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}\end{aligned}\tag{2.1.1}$$

mit

$$0 \leq r < \infty \quad ; \quad 0 \leq \vartheta \leq \pi \quad ; \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

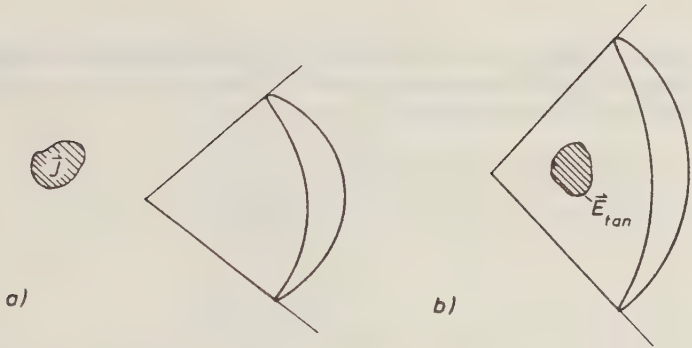


Abbildung 2.1.1: *Geometrie der untersuchten Randwertprobleme*
a) *Beugung elektromagnetischer Wellen an einem elliptischen Kegel*
b) *Der elliptische Kegel als Aperturstrahler*

und

$$0 \leq k, k' \leq 1 \quad ; \quad k^2 + k'^2 = 1 \quad .$$

In der Literatur findet man bereits eine Reihe von Untersuchungen zu diesem Koordinatensystem ([29],[34],[69],[39],[36]), so daß wir uns an dieser Stelle darauf beschränken können, die wichtigsten Eigenschaften des Systems ohne Herleitung vorzustellen.

Die Koordinate r mißt in diesem System genau wie in Kugelkoordinaten den Abstand eines Punktes von dem Koordinatenursprung. Es handelt sich somit um ein sphärisches Koordinatensystem, also um ein System, bei dem die Koordinatenflächen $r = const$ konzentrische Kugelschalen um den Koordinatenursprung bilden.

Die beiden transversalen Koordinaten ϑ und φ können in dem Fall $k^2 = 1$ als Winkel in einem Kugelkoordinatensystem mit der z -Achse als Polarachse aufgefaßt werden. Der Parameter k^2 stellt somit ein Maß für die Abweichung der elliptischen Kegelkoordinaten von den Kugelkoordinaten dar.

Die Koordinatenflächen $\vartheta = \vartheta_0 = const$ sind Mantelflächen von semi-infinity

Kegeln mit elliptischem Querschnitt (Abb. 2.1.2). Die Achse dieser Kegel ist identisch mit der positiven bzw. negativen z -Achse und deren Spitze liegt in dem Koordinatenursprung $r=0$.

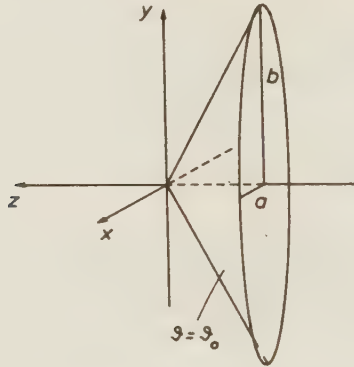


Abbildung 2.1.2: *Zur Beschreibung des Kegels in elliptischen Kegelkoordinaten*

Die Geometrie dieser Koordinatenflächen wird deutlicher, wenn man die Schnittkurve dieser Fläche mit einer Ebene $z = z_0 = \text{const}$ betrachtet. In dem Fall $\vartheta_0 \neq \pi/2$ gilt für die Punkte (x, y) auf dieser Kurve

$$\frac{x^2}{z_0^2 \tan^2 \vartheta_0} + \frac{y^2}{z_0^2 \frac{1 - k^2 \cos^2 \vartheta_0}{k^2 \cos^2 \vartheta_0}} = 1 \quad . \quad (2.1.2)$$

Dies ist die Gleichung einer Ellipse mit der kleinen Halbachse

$$a = |z_0 \tan \vartheta_0|$$

in der (x, z) -Ebene und der großen Halbachse

$$b = |z_0| \sqrt{\frac{1 - k^2 \cos^2 \vartheta_0}{k^2 \cos^2 \vartheta_0}}$$

in der (y, z) -Ebene (Abb. 2.1.2).

Die Flächen $\varphi = \varphi_0 = \text{const}$ beschreiben Mantelflächen von halben elliptischen Kegeln mit der y -Achse als Symmetrieachse, die für $k^2 = 1$ in Halbebenen mit der z -Achse als Begrenzung übergehen [29].

Wie aus Gleichung 2.1.2 ersichtlich, ist für die Beschreibung eines konkreten Objektes aus der zweiparametrischen Schar elliptischer Kegel die Angabe von k^2 und ϑ_0 erforderlich. Ohne Einschränkung der Allgemeinheit kann dabei der Variabilitätsbereich von ϑ_0 auf das Intervall

$$\frac{\pi}{2} \leq \vartheta_0 \leq \pi \quad (2.1.3)$$

beschränkt werden. Dies bedeutet lediglich, daß der Kegel um die negative z -Achse geschlossen ist.

Der Anschaulichkeit halber werden wir i.f. für die Kennzeichnung eines elliptischen Kegels zumeist dessen extreme Halboffnungswinkel $\alpha_{\min}$ und $\alpha_{\max}$ benutzen (Abb. 2.1.3), die unter der Voraussetzung von Gl. 2.1.3 über den Zusammenhang

$$\vartheta_0 = \pi - \alpha_{\min} \quad (2.1.4)$$

und

$$k = \frac{\cos \alpha_{\max}}{\cos \alpha_{\min}} \quad (2.1.5)$$

mit den Systemparametern k^2 und ϑ_0 verknüpft sind. Der größte Öffnungswinkel liegt bei den hier benutzten Koordinaten immer in der (y, z) -Ebene und der kleinste in der (x, z) -Ebene.

In Abbildung 2.1.4 ist der Definitionsbereich der Menge der elliptischen Kegel für beide Arten der Kennzeichnung aufgetragen. An den Rändern dieser Bereiche entarten die elliptischen Kegel zu einfacheren geometrischen Formen. Wählt man z.B. $\alpha_{\max} = 90^\circ$, so erhält man einen Keil mit dem halben Öffnungswinkel $\alpha_{\min}$. Dagegen entartet der Kegel für $\alpha_{\min} = 0^\circ$ zu einer sektorförmigen Fläche, hier kurz Sektor genannt, in der (y, z) -Ebene. Für den Halboffnungswinkel dieser Sektoren erhält man

$$\alpha = \arccos k = \alpha_{\max}.$$

Die Halbene ergibt sich als Spezialfall des Keils mit $\alpha_{\min} = 0^\circ$ bzw. des Sektors mit $\alpha_{\max} = 90^\circ$.

Eine Besonderheit stellt der Entartungsfall $\alpha_{\min} = 90^\circ$ dar. In diesem Fall weitet sich der elliptische Kegel zu dem Halbraum $z < 0$ auf. Aus Abbildung 2.1.4

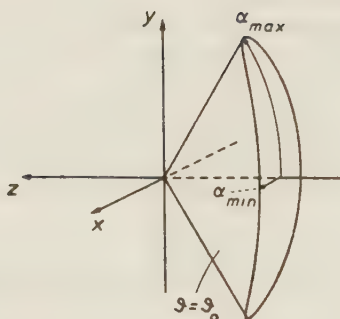


Abbildung 2.1.3: *Zur Definition der Hauptöffnungswinkel eines elliptischen Kegels*

ist ersichtlich, daß diesem Fall genau ein Punkt in der $(\alpha_{min}, \alpha_{max})$ -Ebene zugeordnet ist, während für den Systemparameter k^2 keine eindeutige Festlegung gemacht werden kann.

Als letzten Spezialfall erhält man für $\alpha_{min} = \alpha_{max}$ noch die Entartung des elliptischen Kegels zu einem Kreiskegel. Aus Abb. 2.1.4 ist zu entnehmen, daß in diesem Fall $k^2 = 1$ ist, und damit die elliptischen Kegelkoordinaten in gewöhnliche Kugelkoordinaten übergehen.

Wir werden verschiedentlich elliptische Kegelkoordinaten und Kugelkoordinaten nebeneinander benutzen, weshalb es zweckmäßig erscheint, für die letzteren gesonderte Bezeichnungen einzuführen. Da die Koordinate r in beiden Systemen die gleiche Bedeutung hat, müssen lediglich die Winkelkoordinaten neu benannt werden. Wir schreiben für diese ϑ bzw. φ .

Ein kartesischer Punkt (x, y, z) wird dann in elliptischen Kegelkoordinaten durch das Tripel (r, ϑ, φ) und in Kugelkoordinaten durch (r, ϑ, φ) beschrieben.

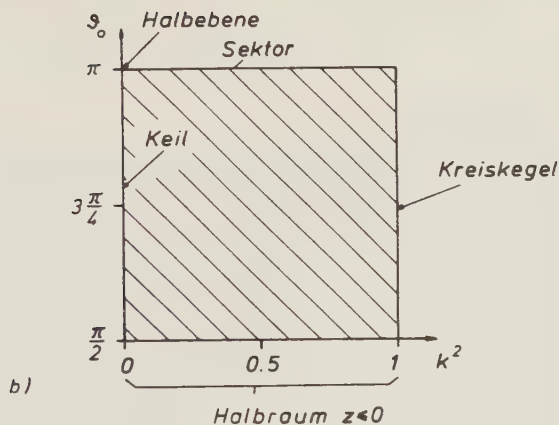
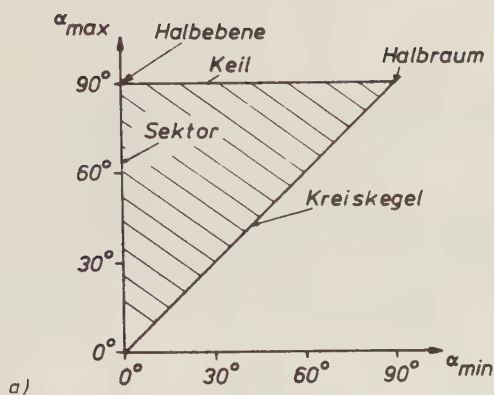


Abbildung 2.1.4: Der Definitionsbereich der elliptischen Kegel
a) bei Beschreibung mit Hilfe der Hauptöffnungswinkel
b) bei Beschreibung mit Hilfe der Systemparameter

ben. Nach Gl. 2.1.1 gilt

$$\begin{aligned} \text{a)} \quad x &= r \sin \vartheta \cos \varphi &= r \sin \bar{\vartheta} \cos \bar{\varphi} \\ \text{b)} \quad y &= r \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \vartheta} \sin \varphi &= r \sin \bar{\vartheta} \sin \bar{\varphi} \\ \text{c)} \quad z &= r \cos \vartheta \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi} &= r \cos \bar{\vartheta} \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Diese Transformationsbeziehungen werden wesentlich vereinfacht, wenn man speziell Punkte in den Ebenen $x=0$, $y=0$ oder $z=0$ betrachtet. Für Punkte in der Ebene $z=0$ gilt nach Gl. 2.1.6 c)

$$\vartheta = \bar{\vartheta} = \pi/2, \quad (2.1.7)$$

woraus dann mit Gl. 2.1.6 a) und b) folgt, daß in dieser Ebene $\varphi = \bar{\varphi}$ ist. Entsprechend findet man für Punkte in der Ebene $y=0$ die Beziehung

$$\varphi = \bar{\varphi} = \begin{cases} 0 & \text{für } x \geq 0 \\ \pi & \text{für } x < 0 \end{cases} \quad (2.1.8)$$

und damit $\vartheta = \bar{\vartheta}$.

Der Umstand, daß in diesen Ebenen die Koordinaten der beiden Systeme identisch sind, kann dann vorteilhaft ausgenutzt werden, wenn man die in einem der Systeme vorgegebene Darstellung einer Funktion transformieren will in eine entsprechende Darstellung in dem jeweils anderen System. Wir werden darauf z.B. im Zusammenhang mit der Reihenentwicklung ebener elektromagnetischer Wellen in elliptischen Kegelkoordinaten zurückgreifen. In der noch nicht behandelten Ebene $x=0$ sind die Transformationsgleichungen zwischen den beiden Koordinatensystemen nicht ganz so einfach. Dies liegt daran, daß diese Ebene in elliptischen Kegelkoordinaten in verschiedene Bereiche aufgeteilt ist (Abb. 2.1.5). Man muß hier unterscheiden zwischen den Sektoren $\vartheta=0$ bzw. $\vartheta=\pi$ und den Bereichen $\varphi=\pi/2$ bzw. $\varphi=3\pi/2$. Auf eine explizite Angabe der Transformationsgleichungen kann hier verzichtet werden, da diese in der Folge nicht weiter benötigt werden und zudem leicht aus Gl. 2.1.6 hergeleitet werden können. Es sei an dieser Stelle lediglich noch darauf hingewiesen, daß die Beschreibung eines Punktes P auf den Sektoren $\vartheta=0$ und $\vartheta=\pi$ in elliptischen Kegelkoordinaten nicht eindeutig ist. Der Punkt P wird dort nämlich sowohl durch das Tripel (r, ϑ, φ) als auch durch $(r, \vartheta, \pi - \varphi)$ beschrieben. Bei der Darstellung eindeutiger Funktionen

in elliptischen Kegelkoordinaten muß diesem Umstand Rechnung getragen werden. Wir werden an gegebener Stelle noch einmal hierauf zurückkommen (vgl. Kap. 3.2).

Neben den diskutierten geometrischen Eigenschaften der elliptischen Kegelkoordinaten werden in der Theorie zur Lösung der eingangs beschriebenen Randwertaufgaben verschiedene vektoranalytische Beziehungen benötigt. Es erscheint deshalb angebracht, an dieser Stelle eine Diskussion der Darstellungen einiger wichtiger Differentialoperatoren anzuschließen.

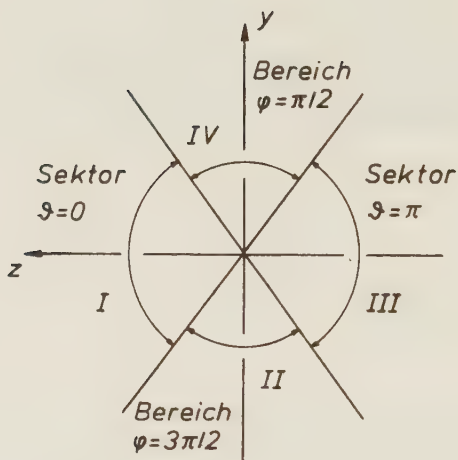


Abbildung 2.1.5: Bereichseinteilung der Ebene $x = 0$

2.2 Vektoren und Differentialoperatoren in elliptischen Kegelkoordinaten

Bei der Herleitung vektoranalytischer Zusammenhänge in einem speziellen Koordinatensystem geht man zunächst von einer Darstellung der Einheitsvektoren dieses Systems aus ([45, Kap. 1.3]), die man z.B. durch Differentiation des Ortsvektors $\mathbf{r}$ nach den Koordinaten des Systems gewinnen kann. Für die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_r$, $\mathbf{e}_\vartheta$ und $\mathbf{e}_\varphi$ der elliptischen Kegelkoordinaten findet man so

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r &= \frac{1}{h_r} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} = \frac{\mathbf{r}}{r} \\ \mathbf{e}_\vartheta &= \frac{1}{h_\vartheta} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} = \frac{1}{s_\vartheta} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \vartheta} \\ \mathbf{e}_\varphi &= \frac{1}{h_\varphi} \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} = \frac{1}{s_\varphi} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \varphi} \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

mit den metrischen Skalierungsfaktoren

$$\begin{aligned} h_r &:= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial r} \right| = 1 \\ h_\vartheta &:= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \vartheta} \right| = r \sqrt{\frac{k'^2 \cos^2 \varphi + k^2 \sin^2 \vartheta}{1 - k'^2 \cos^2 \vartheta}} \\ h_\varphi &:= \left| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \varphi} \right| = r \sqrt{\frac{k'^2 \cos^2 \varphi + k^2 \sin^2 \vartheta}{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}} \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

sowie den normierten Skalierungsfaktoren

$$s_\vartheta := \frac{h_\vartheta}{r} \quad \text{bzw.} \quad s_\varphi := \frac{h_\varphi}{r}, \quad (2.2.3)$$

die ausschließlich von den transversalen Koordinaten ϑ und φ abhängen. Genau an den Kanten der Sektoren in Abb. 2.1.5, also für $\vartheta = 0$ oder π und zugleich $\varphi = \pi/2$ oder $3\pi/2$, verschwinden die Skalierungsfaktoren. An diesen Stellen sind die Einheitsvektoren $\mathbf{e}_\vartheta$ und $\mathbf{e}_\varphi$ nicht definiert. Dies wird verständlich, wenn man in Betracht zieht, daß z. B. der Vektor $\mathbf{e}_\varphi$ für Punkte auf den Sektoren I und III in Abb. 2.1.5 in der Ebene $x=0$ liegt, während er in den Bereichen II und IV senkrecht auf dieser Ebene steht. Bei dem Vektor $\mathbf{e}_\vartheta$ ist dies genau umgekehrt. Die Komponentenzerlegung eines Vektors $\mathbf{A}$ in elliptischen Kegelkoordinaten ist somit genau an diesen singulären Stellen des Koordinatensystems mehrdeutig. Um dort zu einer eindeutigen Darstellung

des Vektors zu gelangen, muß daher eine Umrechnung der Komponenten von $\mathbf{A}$ in kartesische Komponenten vorgenommen werden. Aus der Darstellung

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= A_x \mathbf{e}_x + A_y \mathbf{e}_y + A_z \mathbf{e}_z \\ &= A_r \mathbf{e}_r + A_\vartheta \mathbf{e}_\vartheta + A_\varphi \mathbf{e}_\varphi\end{aligned}$$

wird, berücksichtigt man die Orthogonalität der Einheitsvektoren, sofort ersichtlich, daß eine solche Umrechnung durch Skalarmultiplikation der einen Darstellung mit den Einheitsvektoren der jeweils anderen erfolgen kann. Die dabei benötigten Skalarprodukte zwischen den Einheitsvektoren der beiden Systeme sind in Tab. 2.2.1 aufgelistet. Mit Hilfe dieser Produkte können die Komponentenumrechnungen in beide Richtungen durchgeführt werden.

	$\mathbf{e}_x$	$\mathbf{e}_y$	$\mathbf{e}_z$
$\mathbf{e}_r$	$\sin \vartheta \cos \varphi$	$\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \vartheta} \sin \varphi$	$\cos \vartheta \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}$
$\mathbf{e}_\vartheta$	$\frac{1}{s_\vartheta} \cos \vartheta \cos \varphi$	$\frac{1}{s_\vartheta} \frac{k^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \vartheta}} \sin \varphi$	$\frac{-1}{s_\vartheta} \sin \vartheta \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}$
$\mathbf{e}_\varphi$	$\frac{-1}{s_\varphi} \sin \vartheta \sin \varphi$	$\frac{1}{s_\varphi} \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \vartheta} \cos \varphi$	$\frac{-1}{s_\varphi} \frac{k'^2 \sin \varphi \cos \varphi}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}} \cos \vartheta$

Tabelle 2.2.1: *Skalarprodukte zwischen den Einheitsvektoren der elliptischen Kegelkoordinaten und den kartesischen Einheitsvektoren*

Die Skalierungsfaktoren s_ϑ und s_φ werden nun nicht nur im Zusammenhang mit der Definition der Einheitsvektoren benötigt, sondern sie spielen auch eine zentrale Rolle bei der Darstellung von Differentialoperatoren in elliptischen Kegelkoordinaten. Betrachtet man beispielsweise die Änderung df einer skalaren Funktion $f(r, \vartheta, \varphi)$ bei einer infinitesimalen Änderung des Ortes um $d\mathbf{r}$

in Richtung der Koordinate ϑ , so gilt

$$\begin{aligned} df &= d\mathbf{r} \cdot \nabla f \\ &= d\mathbf{r}^i \mathbf{e}_i \cdot \nabla f \\ &= d\mathbf{r}^i \nabla_i f = \frac{\partial f}{\partial \vartheta} d\vartheta \quad . \end{aligned}$$

Nach Gl. 2.2.2 ist aber

$$|d\mathbf{r}| = r s_\vartheta d\vartheta \quad ,$$

so daß sich für die ϑ -Komponente des ∇ -Operators

$$\nabla_\vartheta = \frac{1}{r s_\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta}$$

ergibt. Auf ähnliche Weise erhält man auch die anderen Komponenten des ∇ -Operators, so daß man schließlich schreiben kann

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{r s_\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{r s_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad . \quad (2.2.4)$$

Mit Hilfe dieser Darstellung des ∇ -Operators können im Prinzip alle Differentialoperatoren, die in der Folge von Interesse sind, in elliptischen Kugelkoordinaten angeschrieben werden. Wegen der ausgezeichneten Rolle der r -Komponente in sphärischen Koordinatensystemen erweist es sich allerdings häufig als sinnvoll, die zu dieser Komponente senkrechten Anteile eines Vektors oder Vektoroperators in einem sogenannten Transversalanteil zusammenzufassen. Wir schreiben deshalb unter Einführung des Operators

$$\nabla_t = \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{s_\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{s_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} \quad (2.2.5)$$

den ∇ -Operator in der Form

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \nabla_t \quad . \quad (2.2.6)$$

Alle weiteren in diesem Zusammenhang interessierenden Differentialoperatoren können dann mit Hilfe von Gl. 2.2.4 bzw. 2.2.6 in elliptischen Kegelkoordinaten dargestellt werden. Die dabei benötigten Ableitungen der Einheitsvektoren nach den Koordinaten r, ϑ und φ sind nach [45, Kap 1.3, Gl. 1.3.6] ebenfalls mit Hilfe der Skalierungsfaktoren auszudrücken und man erhält so die in Tab. 2.2.2 angeführten Darstellungen.

Nach dieser Diskussion der wichtigsten geometrischen und vektoranalytischen Eigenschaften der elliptischen Kegelkoordinaten, kann nun die Lösung der eingangs beschriebenen Randwertaufgaben angegangen werden. Wir werden dabei zunächst eine allgemeine Lösung der Maxwellschen Gleichungen in diesem Koordinatensystem ableiten.

Bezeichng.		Darst. in ellipt. Kegelkoordinaten
grad f	∇f	$\mathbf{e}_r \frac{\partial f}{\partial r} + \mathbf{e}_\vartheta \frac{1}{rs_\vartheta} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} + \mathbf{e}_\varphi \frac{1}{rs_\varphi} \frac{\partial f}{\partial \varphi}$
div $\mathbf{A}$	$\nabla \cdot \mathbf{A}$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 A_r) + \frac{1}{rs_\vartheta s_\varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (s_\varphi A_\vartheta) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (s_\vartheta A_\varphi) \right]$
rot $\mathbf{A}$	$\nabla \times \mathbf{A}$	$\frac{1}{rs_\vartheta s_\varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} (s_\varphi A_\varphi) + \frac{\partial}{\partial \varphi} (s_\vartheta A_\vartheta) \right] \mathbf{e}_r$ $+ \left[\frac{1}{rs_\varphi} \frac{\partial}{\partial \varphi} A_r - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\varphi) \right] \mathbf{e}_\vartheta$ $+ \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r A_\vartheta) - \frac{1}{rs_\vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} A_r \right] \mathbf{e}_\varphi$
—	$(\mathbf{r} \times \nabla) f$	$-\frac{1}{s_\varphi} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{s_\vartheta} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\varphi$
—	$(\mathbf{r} \times \nabla)^2 f$	$\frac{1}{s_\vartheta s_\varphi} \left[\frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{s_\varphi}{s_\vartheta} \frac{\partial f}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{s_\vartheta}{s_\varphi} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) \right]$
—	$\nabla^2 f$	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} (\mathbf{r} \times \nabla)^2 f$

Tabelle 2.2.2: *Darstellungen einiger wichtiger Differentialoperatoren in elliptischen Kegelkoordinaten*

3 Darstellung elektromagnetischer Wellenfelder in elliptischen Kegelkoordinaten

Bei der Untersuchung elektromagnetischer Randwertprobleme in elliptischen Kegelkoordinaten geht man zunächst von den vektoriellen Partikulärlösungen der Maxwellschen Gleichungen in diesem Koordinatensystem aus und stellt dann das Gesamtfeld durch Superposition dieser Partialwellen dar.

Für den Spezialfall der Kugelkoordinaten sind solche Feldentwicklungen bereits in der Literatur ausführlich diskutiert ([33],[64],[45],[58]). Die dort entwickelte Lösungstheorie der Maxwellschen Gleichungen in Kugelkoordinaten kann, wie wir noch zeigen werden, so verallgemeinert werden, daß sie in jedem sphärischen Koordinatensystem anwendbar ist. Wir werden hierbei eine Notation benutzen, die in ähnlicher Form auch von Stratton ([58]) verwendet wird.

Die Besonderheiten der elliptischen Kegelkoordinaten müssen erst bei der Untersuchung des Transversalanteils der Lösungsfunktionen berücksichtigt werden. Eine kurze Zusammenfassung der wesentlichen Aspekte der Theorie der Laméschen Produkte, also der Produkte aus periodischen und nicht-periodischen Laméschen Funktionen, die hier als Lösungsfunktionen auftreten, haben wir deshalb in einem getrennten Abschnitt dargestellt. Eine Einführung in die Methoden zur Berechnung der Laméschen Funktionen und ihrer Eigenwerte ist im Anhang zu finden.

Bei der Herleitung der Partikulärlösungen der Maxwellschen Gleichungen gehen wir nicht auf die Quellen des Feldes ein, die letztlich die Amplitude festlegen, mit der jede Partikulärlösung zu dem Gesamtfeld beiträgt. Zur Bestimmung dieser Amplituden leiten wir zunächst mit Hilfe des Konzeptes der dyadischen Greenschen Funktion eine Integraldarstellung des Feldes her, die einen Zusammenhang zwischen den felderzeugenden Größen und der elektrischen Feldstärke angibt. Durch eine Reihenentwicklung der Greenschen Dyade nach den zuvor hergeleiteten Partikulärlösungen gelangt man schließlich zu der gesuchten vollständigen Reihenentwicklung des elektromagnetischen Wellenfeldes. Der Übersichtlichkeit halber werden wir die hier benötigte Reihenentwicklung der Greenschen Dyade zunächst nur angeben und dann in einem gesonderten Abschnitt herleiten.

3.1 Partikulärlösungen der quellenfreien Maxwell'schen Gleichungen

Bei der Bestimmung der Lösungen der quellenfreien Maxwell'schen Gleichungen in einem sphärischen Koordinatensystem wird man zweckmäßig zunächst das System der Feldgleichungen entkoppeln, um so zu zwei getrennten, aber identischen partiellen Differentialgleichungen für die elektrische und für die magnetische Feldstärke zu gelangen. Zur Lösung dieser Vektordifferentialgleichungen kann man, unabhängig von dem Koordinatensystem, zwei voneinander linear unabhängige Vektorfunktionen ansetzen, die durch die Anwendung spezieller vektorieller Differentialoperatoren auf eine noch zu bestimmende skalare Funktion Ψ definiert sind. Wir werden zeigen, daß man so zu einer Lösung der Feldgleichungen gelangt, wenn man für Ψ eine Lösung der skalaren Helmholtzgleichung einsetzt.

Ein Separationsansatz für Ψ führt schließlich zu einem vollständigen System von Partikulärlösungen der skalaren Helmholtzgleichung, die einzeln in die zuvor definierten Vektorfunktionen eingesetzt werden. Man erhält so ein vollständiges System von Partiallösungen der quellenfreien Maxwell'schen Gleichungen in elliptischen Kegelkoordinaten.

Ein beliebiges elektromagnetisches Feld kann dann in quellenfreien Raumgebieten in eine Summe über diese Partialwellen entwickelt werden. Welche Partialwellen dabei eine Rolle spielen, hängt von der vorgegebenen Randbedingung ab. Wir werden hier zunächst diejenigen Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen herleiten, für die die Tangentialkomponente der elektrischen Feldstärke auf dem Mantel des elliptischen Kegels verschwindet. Mit Hilfe der dyadischen Greenschen Funktion des elliptischen Kegels kann man dann, wie wir in einem späteren Kapitel zeigen, auch bei beliebigen Randbedingungen eine Feldentwicklung nach den hier hergeleiteten Lösungsfunktionen angeben.

Wir beschränken uns in dieser Arbeit auf die Untersuchung zeitharmonischer Wellenfunktionen in linearen, isotropen und homogenen Medien. Bei einem Zeitfaktor $\exp(+j\omega t)$ kann man dann die beiden ersten Maxwell'schen Gleichungen für quellenfreie Raumgebiete in der Form

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= j\omega \epsilon \mathbf{E} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega \mu \mathbf{H}\end{aligned}\tag{3.1.1}$$

anschreiben. Die Divergenzfreiheit der elektrischen und der magnetischen

Feldstärke folgt direkt aus diesen beiden Gleichungen. Sie muß daher nicht gesondert berücksichtigt werden.

Durch Entkopplung der Maxwell'schen Gleichungen erhält man nun für die elektrische Feldstärke die Differentialgleichung ¹

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - \kappa^2 \mathbf{E} = 0 \quad (3.1.2)$$

Die Größe κ stellt hierbei die Wellenzahl dar, die über die Beziehung

$$\kappa = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$$

mit den Materialparametern ϵ und μ sowie der Kreisfrequenz ω verknüpft ist. Eine identische Differentialgleichung kann für die magnetische Feldstärke $\mathbf{H}$ aufgestellt werden, was wir hier allerdings nicht explizit ausführen wollen, da die magnetische Feldstärke mit Hilfe der 2. Maxwell'schen Gleichung aus der elektrischen Feldstärke berechnet werden kann.

Da nun Gl. 3.1.2 eine homogene Differentialgleichung 2. Ordnung ist, kann jede ihrer Lösungen als Linearkombination zweier spezieller, linear unabhängiger Lösungen dargestellt werden. Mit anderen Worten, es genügt, zwei spezielle Lösungen zu finden, um alle weiteren daraus ableiten zu können.

Eine dieser Lösungen ist gegeben durch die Vektorfunktion

$$\mathbf{M} := (\mathbf{r} \times \nabla) \Psi(\mathbf{r}) = \mathbf{r} \times \nabla \Psi(\mathbf{r}) \quad (3.1.3)$$

mit einer zunächst noch unbestimmten skalaren Funktion $\Psi(\mathbf{r})$.

Zum Beweis bildet man zunächst die Rotation von $\mathbf{M}$

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{M} &= \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla \Psi) \\ &= \mathbf{r} \nabla^2 \Psi - \nabla \Psi \nabla \cdot \mathbf{r} + (\nabla \Psi \cdot \nabla) \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \nabla) \nabla \Psi \quad [11, \text{S. 55, A43}] \\ &= \mathbf{r} \nabla^2 \Psi - 2 \nabla \Psi - (\mathbf{r} \cdot \nabla) \nabla \Psi \end{aligned}$$

Damit erhält man

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{M} = \nabla \times [\mathbf{r} \nabla^2 \Psi] \quad (3.1.4)$$

¹Differentialgleichungen dieses Typs werden wir in der Folge nicht ganz korrekt als vektorielle Helmholtzgleichung bezeichnen, da sie zumindest für divergenzfreie Felder mit der Helmholtzgleichung identisch sind.

da $\nabla \times \nabla \Psi = 0$ und $\nabla \times (\mathbf{r} \cdot \nabla) \nabla \Psi = 0$ (Gl. A1.1 e)).

Desweiteren gilt (Gl. A1.1 b))

$$(\mathbf{r} \times \nabla) \Psi = -\nabla \times (\mathbf{r} \Psi) \quad ,$$

so daß man schließlich erhält

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{M} &= \nabla \times [\mathbf{r} \nabla^2 \Psi] + \kappa^2 \nabla \times [\mathbf{r} \Psi] \\ &= \nabla \times [\mathbf{r} (\nabla^2 \Psi + \kappa^2 \Psi)] \quad . \end{aligned}$$

Die Vektorfunktion $\mathbf{M}$ ist also dann eine Lösung der homogenen, vektoriellen Helmholtzgleichung, wenn die Funktion $\Psi(\mathbf{r})$ Lösung der skalaren Helmholtzgleichung

$$\nabla^2 \Psi + \kappa^2 \Psi = 0 \quad (3.1.5)$$

ist.

Eine zweite, zu $\mathbf{M}$ linear unabhängige Lösung erhält man durch den Ansatz

$$\mathbf{N} := \frac{1}{\kappa} [\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla)] \bar{\Psi} \quad , \quad (3.1.6)$$

wobei der Vorfaktor $1/\kappa$ lediglich aus Gründen der Konvention eingeführt wird. Die Funktion $\bar{\Psi}$ muß hier nicht unbedingt die gleiche Funktion wie in Gl. 3.1.3 sein.

Für die Rotation von $\mathbf{N}$ erhält man mit Gl. 3.1.4

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{N} &= \frac{1}{\kappa} \nabla \times \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla \bar{\Psi}) \\ &= \frac{1}{\kappa} \nabla \times (\mathbf{r} \nabla^2 \bar{\Psi}) \end{aligned}$$

und damit

$$\begin{aligned} \nabla \times \nabla \times \mathbf{N} - \kappa^2 \mathbf{N} &= \frac{1}{\kappa} \nabla \times \nabla \times [\mathbf{r} \nabla^2 \bar{\Psi}] + \kappa^2 \frac{1}{\kappa} \nabla \times \nabla \times [\mathbf{r} \bar{\Psi}] \\ &= \frac{1}{\kappa} \nabla \times \nabla \times [\mathbf{r} (\nabla^2 \bar{\Psi} + \kappa^2 \bar{\Psi})] \quad . \end{aligned}$$

Die Funktion $\mathbf{N}(\mathbf{r})$ ist somit ebenfalls eine Lösung der vektoriellen Helmholtzgleichung, wenn $\bar{\Psi}(\mathbf{r})$ eine Lösung von Gl. 3.1.5 ist.

Mit den Vektorfunktionen $\mathbf{M}(\mathbf{r})$ und $\mathbf{N}(\mathbf{r})$ liegen nun zwei linear unabhängige Lösungen der homogenen, vektoriellen Helmholtzgleichung vor. Die lineare Unabhängigkeit der Lösungen ist auch dann gewährleistet, wenn in beiden Fällen dieselbe skalare Funktion Ψ eingesetzt wird. Aus der Definition der Funktionen $\mathbf{M}$ und $\mathbf{N}$ und der Differentialgleichung, der beide Funktionen genügen, kann man in diesem Fall nämlich die Beziehungen

$$\nabla \times \mathbf{M} = \kappa \mathbf{N} \quad (3.1.7)$$

und

$$\nabla \times \mathbf{N} = \kappa \mathbf{M} \quad (3.1.8)$$

herleiten, die unmittelbar die Eigenschaft der linearen Unabhängigkeit verdeutlichen.

Diese Gleichungen stellen ein Analogon zu den Maxwellschen Gleichungen (Gl. 3.1.1) dar, in denen die Feldvektoren $\mathbf{E}$ und $\mathbf{H}$ durch ähnliche Beziehungen miteinander verknüpft sind. Tatsächlich benötigt man die Gleichungen 3.1.7 und 3.1.8 dann, wenn man einen der beiden Feldvektoren aus einer Reihendarstellung des anderen berechnen will. Es sei aber noch einmal darauf hingewiesen, daß die Glgn. 3.1.7 und 3.1.8 selbstverständlich nur dann gelten, wenn jeweils auf beiden Seiten dieselbe skalare Funktion Ψ eingesetzt wird.

Zur Bestimmung der gesuchten skalaren Wellenfunktion Ψ ist nun die Differentialgleichung 3.1.5 in elliptischen Kegelkoordinaten zu lösen. In diesem Koordinatensystem kann die skalare Helmholtzgleichung in der Form

$$\begin{aligned} \nabla^2 \Psi + \kappa^2 \Psi = \\ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Psi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} (\mathbf{r} \times \nabla)^2 \Psi + \kappa^2 \Psi = 0 \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

angeschrieben werden. Mit Hilfe des Separationsansatzes

$$\Psi(r, \vartheta, \varphi) = R_\nu(r) Y_\nu(\vartheta, \varphi) \quad (3.1.10)$$

erhält man daraus die gewöhnliche Differentialgleichung

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR_\nu}{dr} \right) + [\kappa^2 r^2 - \nu(\nu + 1)] R_\nu = 0 \quad (3.1.11)$$

und die Eigenwertgleichung

$$(\mathbf{r} \times \nabla)^2 Y_\nu(\vartheta, \varphi) = -\nu(\nu + 1) Y_\nu(\vartheta, \varphi) \quad . \quad (3.1.12)$$

Die Größe ν ist hierbei die Separationskonstante.

Gleichung 3.1.11 ist die Differentialgleichung der sphärischen Zylinderfunktionen $z_\nu(\kappa r)$ [1. Kap. 10], von denen hier aus physikalischen Gründen ausschließlich die sphärischen Besselfunktionen $j_\nu(\kappa r)$ und die sphärischen Hankelfunktionen 2. Art $h_\nu^{(2)}(\kappa r)$ als Lösungsfunktionen benötigt werden. Die sphärischen Besselfunktionen werden dabei zur Darstellung von Funktionen benutzt, die im Koordinatenursprung regulär sind. Dagegen sind die sphärischen Hankelfunktionen dann eine physikalisch sinnvolle Lösung, wenn die darzustellende Wellenfunktion für $r \rightarrow \infty$ der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung genügen muß.

Der Transversalanteil $Y_\nu(\vartheta, \varphi)$ der Lösungsfunktion kann mit Hilfe eines weiteren Separationsansatzes bestimmt werden. Da aber zu einer endgültigen Festlegung von Y_ν Randbedingungen für die skalare Wellenfunktion Ψ benötigt werden, wollen wir zunächst die Komponentendarstellung der elektromagnetischen Partialwellen in elliptischen Kegelkoordinaten mit einem noch unbekannten Transversalanteil Y_ν angeben. Die Randbedingungen für die skalare Wellenfunktion können dann unmittelbar aus dieser Komponentendarstellung abgelesen werden.

Der Separationsansatz 3.1.10 liefert eine Lösung der homogenen Helmholtzgleichung, die noch von der Separationskonstanten ν abhängt. Der Wert dieser Separationskonstanten wird durch die Randbedingung festgelegt, die an die Wellenfunktion Ψ gestellt wird. Im allgemeinen erhält man eine abzählbare Menge von Werten von ν , für die diese Randbedingung erfüllt ist. Die Elemente dieser Menge bezeichnet man als Eigenwerte des Randwertproblems und die zugehörigen Lösungsfunktionen $Y_\nu(\vartheta, \varphi)$ (Gl. 3.1.12) als Eigenfunktionen zu diesen Eigenwerten. Die vollständige Lösung des Randwertproblems ergibt sich als lineare Superpositionen der Partikulärlösungen, die den einzelnen Eigenwerten zugeordnet sind.

Bei den hier betrachteten Problemstellungen ist die Randbedingung für die skalare Wellenfunktion nicht unmittelbar durch die physikalischen Randbedingungen gegeben. Um diese aus der vorgegebenen Randbedingung für die elektrische Feldstärke ablesen zu können, setzt man die Partikulärlösungen

$$\Psi_\nu(\mathbf{r}, \vartheta, \varphi) = z_\nu(\kappa r) Y_\nu(\vartheta, \varphi) \quad (3.1.13)$$

zunächst formal in die **M**- und **N**-Funktionen ein und erhält dann

$$\mathbf{M}_\nu(\mathbf{r}) = (\mathbf{r} \times \nabla) \Psi_\nu = z_\nu(\kappa r) \mathbf{m}_\nu(\vartheta, \varphi) \quad (3.1.14)$$

mit

$$\mathbf{m}_\nu(\vartheta, \varphi) = -\frac{1}{s_\vartheta} \frac{\partial Y_\nu}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{s_\vartheta} \frac{\partial Y_\nu}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi \quad (3.1.15)$$

beziehungsweise (Gl. A1.1 j))

$$\begin{aligned} \mathbf{N}_\nu(\mathbf{r}) &= \frac{1}{\kappa} [\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla)] \bar{\Psi}_\nu \\ &= \frac{\mathbf{r}}{\kappa r^2} z_\nu(\kappa r) (\mathbf{r} \times \nabla)^2 Y_\nu(\vartheta, \varphi) - \frac{1}{\kappa r} \frac{d}{dr} [r z_\nu(\kappa r)] \nabla_\parallel Y_\nu(\vartheta, \varphi) \end{aligned}$$

Diese Darstellung von $\mathbf{N}_\nu$ kann mit $\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r$ und mit Gl. 3.1.12 noch vereinfacht werden. Man erhält

$$\mathbf{N}_\nu(\mathbf{r}) = -\mathbf{e}_r \frac{z_\nu(\kappa r)}{\kappa r} \nu(\nu+1) Y_\nu(\vartheta, \varphi) - \frac{1}{\kappa r} \frac{d}{dr} [r z_\nu(\kappa r)] \mathbf{n}_\nu(\vartheta, \varphi) \quad (3.1.16)$$

$$(3.1.17)$$

mit

$$\mathbf{n}_\nu(\vartheta, \varphi) = \frac{1}{s_\vartheta} \frac{\partial Y_\nu}{\partial \vartheta} \mathbf{e}_\vartheta + \frac{1}{s_\varphi} \frac{\partial Y_\nu}{\partial \varphi} \mathbf{e}_\varphi \quad (3.1.18)$$

Eine Auflistung der einzelnen Komponenten von $\mathbf{M}_\nu$ und $\mathbf{N}_\nu$ ist in Tab. 3.1.1 zu finden. Es sei noch erwähnt, daß die beiden Vektorfunktionen $\mathbf{m}_\nu(\vartheta, \varphi)$ und $\mathbf{n}_\nu(\vartheta, \varphi)$ über die Beziehungen

$$\mathbf{m}_\nu(\vartheta, \varphi) = \mathbf{e}_r \times \mathbf{n}_\nu(\vartheta, \varphi) \quad (3.1.19)$$

und

$$\mathbf{n}_\nu(\vartheta, \varphi) = -\mathbf{e}_r \times \mathbf{m}_\nu(\vartheta, \varphi) \quad (3.1.20)$$

miteinander verknüpft sind, wenn jeweils dieselbe Funktion Y_ν eingesetzt wird. Diese Beziehungen entsprechen den Gleichungen 3.1.7 und 3.1.8.

Man kann nun die elektrische Feldstärke $\mathbf{E}$ in einem quellenfreien Raumgebiet als Summe über alle Partialwellen $\mathbf{M}_\nu$ und $\mathbf{N}_\nu$ darstellen. Dabei muß eine

Bezeichnung der Komponente	Komponenten der M-Funktion	Komponenten der N-Funktion
r	0	$-\frac{z_\nu(\kappa r)}{\kappa r} \nu(\nu+1)Y_\nu$
ϑ	$-z_\nu(\kappa r) \frac{1}{s_\vartheta} \frac{\partial Y_\nu}{\partial \varphi}$	$-\frac{1}{\kappa r} \frac{d}{dr} [r z_\nu(\kappa r)] \frac{1}{s_\vartheta} \frac{\partial Y_\nu}{\partial \vartheta}$
φ	$z_\nu(\kappa r) \frac{1}{s_\vartheta} \frac{\partial Y_\nu}{\partial \vartheta}$	$-\frac{1}{\kappa r} \frac{d}{dr} [r z_\nu(\kappa r)] \frac{1}{s_\varphi} \frac{\partial Y_\nu}{\partial \varphi}$

Tabelle 3.1.1: *Komponenten der M- und N-Funktionen in elliptischen Kegelkoordinaten*

Summe über alle Eigenwerte angesetzt werden, für die die Tangentialkomponente von $\mathbf{E}$ auf dem Kegelmantel verschwindet. Diese Bedingung wird zu unterschiedlichen Eigenwerten für die $\mathbf{M}$ - und die $\mathbf{N}$ -Funktionen führen. Bezeichnen wir die Eigenwerte der $\mathbf{M}$ -Funktionen mit q_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) und diejenigen der $\mathbf{N}$ -Funktionen mit p_i ($i = 1, 2, 3, \dots$), dann kann die Reihenentwicklung der elektrischen Feldstärke in der Form

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_i a_i \mathbf{M}_{q_i}(\mathbf{r}) + \sum_i b_i \mathbf{N}_{p_i}(\mathbf{r}) \quad (3.1.21)$$

mit zunächst unbekannten Amplituden a_i und b_i angeschrieben werden. Die magnetische Feldstärke $\mathbf{H}$ erhält man aus dieser Reihendarstellung mit Hilfe der Maxwell'schen Gleichungen sowie der Gln. 3.1.7 und 3.1.8 zu

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \frac{-1}{j\omega\mu} \left\{ \sum_i a_i \nabla \times \mathbf{M}_{q_i}(\mathbf{r}) + \sum_i b_i \nabla \times \mathbf{N}_{p_i}(\mathbf{r}) \right\} \\ &= \frac{j\kappa}{\omega\mu} \left\{ \sum_i a_i \mathbf{N}_{q_i}(\mathbf{r}) + \sum_i b_i \mathbf{M}_{p_i}(\mathbf{r}) \right\} \quad (3.1.22) \end{aligned}$$

Die Darstellung des elektromagnetischen Wellenfeldes nach Gl. 3.1.21 und Gl. 3.1.22 kann im Sinne einer Modenentwicklung interpretiert werden. Die Summenterme, die den Eigenwerten p_i zugeordnet sind, liefern Feldbeiträge, deren magnetische Feldstärke transversal zu der r -Richtung ist. Es handelt sich dabei also um die E-Moden der Feldentwicklung. Die mit q_i indizierten Feldbeiträge sind dagegen mit den H-Moden des Feldes zu identifizieren. Tab. 3.1.2 zeigt die Komponenten der einzelnen Moden in der Feldentwicklung.

Mit Hilfe der Komponentendarstellung in Tab. 3.1.2 kann nun auch die Randbedingung für den Transversalanteil $Y_\nu(\vartheta, \varphi)$ der skalaren Wellenfunktion $\Psi(\mathbf{r})$ aus der physikalisch vorgegebenen Randbedingung abgeleitet werden.

Wir wollen hier den Fall untersuchen, daß als Randbedingung

$$\mathbf{E}_{tan} = 0$$

auf dem Mantel des elliptischen Kegels vorgegeben ist. Die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke sind dann mit den Komponenten E_r

Komponente	Beiträge der E-Moden	Beiträge der H-Moden
E_r	$-b_i \frac{z_{p_i}(\kappa r)}{\kappa r} p_i(p_i + 1) Y_{p_i}(\vartheta, \varphi)$	0
E_ϑ	$-b_i \frac{1}{\kappa r} \frac{d}{dr} [r z_{p_i}(\kappa r)] \frac{1}{s_\vartheta} \frac{\partial Y_{p_i}}{\partial \vartheta}$	$-a_i z_{q_i}(\kappa r) \frac{1}{s_\varphi} \frac{\partial Y_{q_i}}{\partial \varphi}$
E_φ	$-b_i \frac{1}{\kappa r} \frac{d}{dr} [r z_{p_i}(\kappa r)] \frac{1}{s_\varphi} \frac{\partial Y_{p_i}}{\partial \varphi}$	$a_i z_{q_i}(\kappa r) \frac{1}{s_\vartheta} \frac{\partial Y_{q_i}}{\partial \vartheta}$
H_r	0	$-\frac{j\kappa a_i}{\omega\mu} \frac{z_{q_i}(\kappa r)}{\kappa r} q_i(q_i + 1) Y_{q_i}(\vartheta, \varphi)$
H_ϑ	$-\frac{j\kappa b_i}{\omega\mu} z_{p_i}(\kappa r) \frac{1}{s_\varphi} \frac{\partial Y_{p_i}}{\partial \varphi}$	$-\frac{j\kappa a_i}{\omega\mu} \frac{1}{\kappa r} \frac{d}{dr} [r z_{q_i}(\kappa r)] \frac{1}{s_\vartheta} \frac{\partial Y_{q_i}}{\partial \vartheta}$
H_φ	$\frac{j\kappa b_i}{\omega\mu} z_{p_i}(\kappa r) \frac{1}{s_\vartheta} \frac{\partial Y_{p_i}}{\partial \vartheta}$	$-\frac{j\kappa a_i}{\omega\mu} \frac{1}{\kappa r} \frac{d}{dr} [r z_{q_i}(\kappa r)] \frac{1}{s_\varphi} \frac{\partial Y_{q_i}}{\partial \varphi}$

Tabelle 3.1.2: *Komponenten der E- und H-Moden in elliptischen Kegelkoordinaten*

und E_φ zu identifizieren, so daß man aus Tab. 3.1.2 für die H-Moden die Bedingung

$$\left. \frac{\partial Y_{q_1}}{\partial \vartheta} \right|_{\vartheta=\vartheta_0} = 0 \quad (3.1.23)$$

und für die E-Moden

$$Y_{p_1} \big|_{\vartheta=\vartheta_0} = 0 \quad (3.1.24)$$

ablesen kann. Genau wie bei der Modenentwicklung elektromagnetischer Felder in Hohlleitungen werden also auch hier die E- und H-Wellenanteile des Feldes durch Eigenfunktionen dargestellt, die der Dirichletschen (Gl. 3.1.24) bzw. v. Neumannschen (Gl. 3.1.23) Randbedingung genügen.

Berücksichtigt man neben den Randbedingungen noch, daß alle auftretenden Funktionen innerhalb des Lösungsgebietes — Randpunkte also ausgenommen — stetig und differenzierbar sein müssen, so hat man mit den vorgestellten Lösungen der vektoriellen Helmholtzgleichung ein eindeutig definiertes und vollständiges System von Lösungsfunktionen der quellenfreien Maxwell'schen Gleichungen gefunden. Dabei kann die vorgestellte Lösungstheorie in jedem sphärischen Koordinatensystem angewendet werden. Erst bei der Lösung der Eigenwertgleichung des Transversalanteils $Y_L(\vartheta, \varphi)$ der Lösungsfunktionen muß auf die spezielle Definition der Koordinaten ϑ und φ eingegangen werden. Dies rechtfertigt im nachhinein die Zurückstellung der Untersuchung der Eigenschaften von $Y_L(\vartheta, \varphi)$, die nun nachgeholt werden soll.

3.2 Eigenschaften des Transversalanteils der Lösungsfunktionen

Bei den elliptischen Kegelkoordinaten handelt es sich um ein orthogonales Koordinatensystem, in dem die Helmholtzgleichung vollständig separierbar ist. Die Eigenwertgleichung 3.1.12 kann deshalb in diesem Koordinatensystem durch einen weiteren Separationsansatz auf zwei gewöhnliche Differentialgleichungen zurückgeführt werden.

Der Ansatz

$$Y_\nu(\vartheta, \varphi) = \Theta_\nu(\vartheta)\Phi_\nu(\varphi) \quad (3.2.1)$$

liefert die beiden Laméschen Differentialgleichungen

$$\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi} \frac{d}{d\varphi} \left[\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi} \frac{d\Phi_\nu(\varphi)}{d\varphi} \right] + [\lambda - \nu(\nu+1)k'^2 \sin^2 \varphi] \Phi_\nu(\varphi) = 0 \quad (3.2.2)$$

und

$$\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left[\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \vartheta} \frac{d\Theta_\nu(\vartheta)}{d\vartheta} \right] + [\nu(\nu+1)(1 - k^2 \cos^2 \vartheta) - \lambda] \Theta_\nu(\vartheta) = 0 \quad (3.2.3)$$

mit der zweiten Separationskonstanten λ .

Eine Diskussion der Lösung dieser Differentialgleichungen mit Hilfe geeigneter Reihenansätze ist in Anhang 2 zu finden. An dieser Stelle wollen wir uns darauf beschränken, die wichtigsten Eigenschaften der Lösungsfunktionen $Y_\nu(\vartheta, \varphi)$ zu diskutieren, die letztlich auch für die Aufstellung sinnvoller Reihenansätze benötigt werden.

Bei den hier untersuchten Randwertproblemen gehört stets der gesamte Definitionsbereich $[0, 2\pi]$ der Koordinate φ zu dem physikalischen Lösungsraum. Da aber die beiden Koordinatentripel (r, ϑ, φ) und $(r, \vartheta, 2\pi + \varphi)$ denselben Punkt im Raum beschreiben, wird man die Funktion $\Phi_\nu(\varphi)$ zweckmäßig periodisch ansetzen. Der elliptische Kegel, und damit die Geometrie des Randwertproblems, ist zudem invariant gegenüber Drehungen des Koordinatensystems um den Winkel π oder 2π um die z -Achse. Da mit einer solchen Drehung eine Verschiebung der Koordinate φ um π bzw. 2π verbunden ist, müssen sowohl Funktionen mit der kleinsten Periode π als auch solche mit der kleinsten Periode 2π zugelassen werden. Kleinere Periodenlängen können nur im rotationssymmetrischen Fall $k^2 = 1$ eine Rolle spielen, da das Rand-

wertproblem für $k^2 < 1$ keine Symmetrien aufweist, die einer solchen Periode entsprächen.

Neben der Periodizität wird noch die Parität der Lösungsfunktion $Y_\nu(\vartheta, \varphi)$ zur Klassifizierung herangezogen [31]. Man unterscheidet zwischen Funktionen, die gerade bzw. ungerade symmetrisch bezüglich einer der beiden Symmetrieebenen ($x=0$ oder $y=0$) des elliptischen Kegels (Abb. 2.1.2) sind. Beliebige unsymmetrische Funktionen können dann als Linearkombination von Funktionen unterschiedlicher Symmetrie dargestellt werden [34, chap. 2.3].

Die Symmetrie der Lösungsfunktionen kann nur bezüglich einer der beiden Ebenen vorgegeben werden. Es erweist sich als zweckmäßig, hier die Ebene $x=0$ zu wählen, da dann mit der Festlegung der Symmetrie auch die Eindeutigkeit der Lösungsfunktionen auf den Sektoren² $\vartheta=0$ und $\vartheta=\pi$ sichergestellt ist.

Der Bereich in der Ebene $x=0$, der außerhalb der Sektoren $\vartheta=0$ und $\vartheta=\pi$ liegt, wird durch $\varphi=\pi/2$ bzw. $\varphi=3\pi/2$ (Abb. 2.1.5 beschrieben. Für Lösungsfunktionen $Y_\nu(\vartheta, \varphi)$, die gerade symmetrisch zu dieser Ebene sind, muß daher gelten

$$\Phi_\nu(\varphi) = \Phi_\nu(\pi - \varphi) \quad (3.2.4)$$

und entsprechend für ungerade symmetrische Funktionen

$$\Phi_\nu(\varphi) = -\Phi_\nu(\pi - \varphi) \quad (3.2.5)$$

Zum Beweis, daß die Gln. 3.2.4 und 3.2.5 die Symmetrie der Funktion Φ_ν sowohl zu $\varphi=\pi/2$ als auch zu $\varphi=3\pi/2$ festlegen, setze man dort zum einen $\varphi=\pi/2-\alpha$ und zum anderen $\varphi=3\pi/2-\alpha$ ein. Im letzteren Fall muß noch berücksichtigt werden, daß $\Phi_\nu(\varphi)$ in jedem Fall eine 2π -periodische Funktion ist.

Zur Bestimmung der Symmetriebedingungen auf den Sektoren erweitert man vorübergehend den Variabilitätsbereich der Koordinate ϑ über das Intervall $[0, \pi]$ hinaus. Für stetige, gerade symmetrische Funktionen muß dann gelten

$$\left. \frac{d\Phi_\nu(\vartheta)}{d\vartheta} \right|_{\vartheta=0, \pi} = 0 \quad (3.2.6)$$

²Die Eindeutigkeit muß selbstverständlich nur auf den Sektoren sichergestellt werden, die tatsächlich zu dem physikalischen Lösungsraum gehören und auch keine metallische Berandung des Lösungsraumes darstellen. Trotzdem werden wir die Eindeutigkeitsbedingung für beide Sektoren formulieren. Für Sektoren, die nicht zu dem Lösungsgebiet gehören, entfällt diese Bedingung dann einfach.

und für ungerade symmetrische Funktionen

$$\Theta_\nu(\vartheta)|_{\vartheta=0,\pi} = 0 \quad . \quad (3.2.7)$$

Die Symmetriebeziehungen nach Gl. 3.2.4 bis 3.2.7 stellen auch die Eindeutigkeit der Lösungsfunktionen (vgl. Kap. 2.1) auf den Sektoren $\vartheta = 0$ und $\vartheta = \pi$ sicher. Da — bei festem Abstand r — durch φ und $(\pi - \varphi)$ derselbe Punkt auf dem Sektor beschrieben wird, muß eine dort eindeutige Funktion $F(\vartheta, \varphi)$ der Bedingung

$$F(\vartheta, \varphi)|_{\vartheta=0,\pi} = F(\vartheta, \pi - \varphi)|_{\vartheta=0,\pi} \quad (3.2.8)$$

genügen. Ist diese Funktion dort auch stetig differenzierbar, so muß gelten

$$\left. \frac{\partial F(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta} \right|_{\vartheta=0,\pi} = - \left. \frac{\partial F(\vartheta, \pi - \varphi)}{\partial \vartheta} \right|_{\vartheta=0,\pi} , \quad (3.2.9)$$

da ϑ auf den beiden Seiten des Sektors in entgegengesetzte Richtungen läuft. Für die Funktion $Y_\nu(\vartheta, \varphi)$ folgt Gl. 3.2.8

$$\Theta_\nu(\vartheta)|_{\vartheta=0,\pi} \Phi_\nu(\varphi) = \Theta_\nu(\vartheta)|_{\vartheta=0,\pi} \Phi_\nu(\pi - \varphi)$$

bzw. aus Gl. 3.2.9

$$\left. \frac{d\Theta_\nu(\vartheta)}{d\vartheta} \right|_{\vartheta=0,\pi} \Phi_\nu(\varphi) = - \left. \frac{d\Theta_\nu(\vartheta)}{d\vartheta} \right|_{\vartheta=0,\pi} \Phi_\nu(\pi - \varphi) \quad .$$

Für gerade symmetrische Funktionen erhält man dann mit Gl. 3.2.4

$$\Theta_\nu(\vartheta)|_{\vartheta=0,\pi} = \Theta_\nu(\vartheta)|_{\vartheta=0,\pi}$$

bzw.

$$\left. \frac{d\Theta_\nu(\vartheta)}{d\vartheta} \right|_{\vartheta=0,\pi} = - \left. \frac{d\Theta_\nu(\vartheta)}{d\vartheta} \right|_{\vartheta=0,\pi} .$$

Die letzte Gleichung kann aber nur mit

$$\left. \frac{d\Theta_\nu(\vartheta)}{d\vartheta} \right|_{\vartheta=0,\pi} = 0$$

erfüllt werden. Dies ist genau die Symmetriebedingung 3.2.6. Entsprechend zeigt man, daß die Eindeutigkeitsbedingung für ungerade symmetrische Funktionen mit der Symmetriebedingung 3.2.7 übereinstimmt.

Mit der Klassifizierung nach Periodizität und Symmetrie gelangt man zu den vier Typen von Lösungsfunktionen $Y_\nu(\vartheta, \varphi)$, die in Tabelle 3.2.1 aufgelistet sind. Für jeden dieser Funktionstypen wird die periodische Lamésche Funktion $\Phi_\nu(\varphi)$ durch eine Fourierreihe geeigneter Periodizität und Symmetrie dargestellt (Anhang 2). Durch Einsetzen dieser Reihen in Gl. 3.2.2 erhält man den Wert der Separationskonstanten λ und die Koeffizienten der Reihenentwicklung in Abhängigkeit von dem Eigenwert ν [29, Anh. 2].

Für die nicht-periodischen Laméschen Funktionen $\Theta_\nu(\vartheta)$ existiert zu jedem Funktionstyp eine Reihenentwicklung nach zugeordneten Legendrefunktionen, die die Symmetriebedingung auf dem Sektor $\vartheta=0$ für alle Werte von ν erfüllt. Ein solcher Ansatz ist insofern sinnvoll, als bei den hier betrachteten Randwertproblemen der Sektor $\vartheta=0$ immer zu dem Lösungsgebiet gehört.

Der Eigenwert ν schließlich wird durch die Randbedingung festgelegt, die für die Lösungsfunktion $Y_\nu(\vartheta, \varphi)$ auf dem Kegelmantel $\vartheta = \vartheta_0$ vorgegeben ist. Wie wir bereits in Kap. 3.1 festgestellt haben (Gl. 3.1.23 und 3.1.24), muß Y_ν dort der Dirichletschen bzw. v. Neumannschen Randbedingung genügen. In [34, chap. 2] wird gezeigt, daß die Eigenwerte zu diesen Randbedingungen eine abzählbare Teilmenge der reellen Zahlen bilden. Zudem interessieren in diesem Zusammenhang nur diejenigen Eigenwerte, die größer als Null sind, da ein negativer Eigenwert letztlich eine elektrische oder eine magnetische Feldstärke liefert, die an der Kegelspitze nicht der Energiebedingung genügt (Kap. 4.1).

Für die Eigenwerte zur Dirichlet-Bedingung wurde in Kap. 3.1 die Bezeichnung p_i ($i = 1, 2, 3, \dots$) und für diejenigen zur v. Neumann-Bedingung die Notation q_i ($i = 1, 2, 3, \dots$). Die transzendenten Bestimmungsgleichungen für diese Eigenwerte lauten dann

$$\Theta_{p_i} \big|_{\vartheta=\vartheta_0} = 0 \quad (3.2.10)$$

bzw.

$$\frac{d\Theta_{q_i}}{d\vartheta} \bigg|_{\vartheta=\vartheta_0} = 0 \quad (3.2.11)$$

Diese Gleichungen müssen zur Bestimmung der Eigenwerte mit Hilfe eines numerischen Verfahrens gelöst werden. Auf das hier verwendete Verfahren wird in Anhang 2 eingegangen.

Typ	Periode	Symmetrie	Eigenschaften
I	π	gerade	$\Phi_\nu(\varphi) = \Phi_\nu(\pi - \varphi)$ $\Phi_\nu(\varphi) = \Phi_\nu(\varphi + \pi)$ $\left. \frac{d\Theta_\nu(\vartheta)}{d\vartheta} \right _{\vartheta=0,\pi} = 0$
II	2π	ungerade	$\Phi_\nu(\varphi) = -\Phi_\nu(\pi - \varphi)$ $\Phi_\nu(\varphi) = \Phi_\nu(\varphi + 2\pi)$ $\Theta_\nu(\vartheta) _{\vartheta=0,\pi} = 0$
III	π	ungerade	$\Phi_\nu(\varphi) = -\Phi_\nu(\pi - \varphi)$ $\Phi_\nu(\varphi) = \Phi_\nu(\varphi + \pi)$ $\Theta_\nu(\vartheta) _{\vartheta=0,\pi} = 0$
IV	2π	gerade	$\Phi_\nu(\varphi) = \Phi_\nu(\pi - \varphi)$ $\Phi_\nu(\varphi) = \Phi_\nu(\varphi + 2\pi)$ $\left. \frac{d\Theta_\nu(\vartheta)}{d\vartheta} \right _{\vartheta=0,\pi} = 0$

Tabelle 3.2.1: Einteilung der Lösungsfunktionen nach ihrer Periodizität und Symmetrie.

Falls keine Randbedingungen auf dem Kegelmantel vorgegeben sind, sondern der Lösungsraum gleich dem freien Raum ist, so sind die Gln. 3.2.10 und 3.2.11 durch die Eindeutigkeitsbedingungen auf dem Sektor $\vartheta = \pi$ zu ersetzen. In diesem Fall sind die Eigenwerte ν gleich den natürlichen Zahlen und sowohl die periodischen als auch die nicht-periodischen Laméschen Funktionen können durch endliche Reihen dargestellt werden [29]. Zum Abschluß sei noch darauf hingewiesen, daß die Lösungsfunktionen $Y_{p_i}(\vartheta, \varphi)$ und $Y_{q_i}(\vartheta, \varphi)$ jeweils ein vollständiges, orthogonales Funktionensystem bezüglich der über dem Lösungsraum quadratintegrierbaren Lösungen von Gl. 3.1.12 bilden [34]. Dabei sind die Funktionen Y_i hier so normiert, daß

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\vartheta_0} Y_{p_i}(\vartheta, \varphi) Y_{p_{i'}}(\vartheta, \varphi) s_{\vartheta} s_{\varphi} d\vartheta d\varphi = \delta_{ii'} \quad (3.2.12)$$

und

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\vartheta_0} Y_{q_i}(\vartheta, \varphi) Y_{q_{i'}}(\vartheta, \varphi) s_{\vartheta} s_{\varphi} d\vartheta d\varphi = \delta_{ii'} \quad (3.2.13)$$

mit dem Kroneckersymbol

$$\delta_{ii'} = \begin{cases} 0 & \text{f. } i \neq i' \\ 1 & \text{f. } i = i' \end{cases}$$

Die Vollständigkeitsrelationen [45, Kap 6.3] für diese Funktionensysteme können dann in der Form

$$\frac{1}{s_{\vartheta} s_{\varphi}} \delta(\vartheta - \vartheta') \delta(\varphi - \varphi') = \sum_i Y_{p_i}(\vartheta, \varphi) Y_{p_i}(\vartheta', \varphi') \quad (3.2.14)$$

bzw.

$$\frac{1}{s_{\vartheta} s_{\varphi}} \delta(\vartheta - \vartheta') \delta(\varphi - \varphi') = \sum_i Y_{q_i}(\vartheta, \varphi) Y_{q_i}(\vartheta', \varphi') \quad (3.2.15)$$

angeschrieben werden. Von dieser Darstellung der zweidimensionalen Delta-Distribution $\delta(\vartheta - \vartheta') \delta(\varphi - \varphi')$ werden wir bei der Herleitung der dyadischen Greenschen Funktion des elliptischen Kegels Gebrauch machen.

Mit Hilfe der vorgestellten Lösungstheorie hat man nun ein vollständiges System von Partikulärlösungen der quellenfreien Maxwellschen Gleichungen gewonnen. Es ist nun ein Konzept zu entwickeln, mit dessen Hilfe man das

elektromagnetische Gesamtfeld einer vorgegebenen Quell- bzw. Randwertverteilung berechnen kann. Wir benutzen dabei die dyadische Greensche Funktion, die wir als Summe über die hergeleiteten Partikulärlösungen der homogenen, vektoriellen Helmholtzgleichung darstellen.

3.3 Die Integraldarstellung des elektromagnetischen Feldes

Mit Hilfe der in Kap. 3.1 hergeleiteten Lösungen der Maxwell'schen Gleichungen kann im Prinzip jedes elektromagnetische Feld in einem quellenfreien Raumgebiet dargestellt werden. Die Amplitude, mit der jede der dort vorgestellten Partikulärlösungen zu dem Gesamtfeld beiträgt, wird allerdings durch die Quellen und, wie noch zu zeigen ist, durch die Randwerte des Feldes festgelegt. Um die Amplituden der einzelnen Feldanteile zu bestimmen, geht man zweckmäßig von einem Integralzusammenhang zwischen dem Feld und den Quellen bzw. Randwerten aus, den wir hier zunächst herleiten werden. Bei dieser Herleitung halten wir uns weitgehend an die in [20, Anhang D] dargestellte Vorgehensweise. Dabei wird zunächst eine tensorielle Greensche Funktion definiert und mit Hilfe dieses Tensors dann unter Ausnutzung des vektoriellen Greenschen Theorems der gesuchte Integralzusammenhang aufgestellt. Für die Anwendung auf die hier betrachteten Randwertprobleme mit elliptischer Kugelgeometrie muß dieser Integralzusammenhang noch näher erläutert werden. Insbesondere ist hier genau zu definieren, was unter dem Rand des Lösungsgebietes zu verstehen ist. Aus diesen Überlegungen resultiert schließlich eine zusätzliche Bedingung, die an den Greenschen Tensor gestellt werden muß.

Die Feldentwicklung nach den Partikulärlösungen der vektoriellen Helmholtzgleichung erhält man schließlich mit Hilfe einer Reihenentwicklung des Greenschen Tensors nach genau diesen vektoriellen Lösungsfunktionen. Diese Entwicklung werden wir hier zunächst nur ohne Herleitung angeben und die darin auftretenden dyadischen Vektorprodukte näher erläutern. Eine Herleitung wird dann in Abschnitt 3.4 nachgeholt.

Ausgangspunkt unserer Überlegungen sind wieder die Maxwell'schen Gleichungen, die für quellenbehaftete Felder in der Form

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + j\omega\epsilon\mathbf{E} \\ \nabla \times \mathbf{E} &= -j\omega\mu\mathbf{H} \\ \nabla \cdot \mathbf{H} &= 0 \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon}\end{aligned}\tag{3.3.1}$$

anzuschreiben sind. Durch Entkopplung der ersten beiden Gleichungen erhält man dann für die elektrische Feldstärke die Differentialgleichung

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} - \kappa^2 \mathbf{E} = -j\omega\mu \mathbf{J} \quad (3.3.2)$$

Sei nun innerhalb eines einfach geschlossenen Lösungsgebietes V (Abb. 3.3.1) eine Stromdichteverteilung $\mathbf{J}$ vorgegeben. Zusätzlich seien die Tangentialkomponenten von $\mathbf{E}$ und von $\nabla \times \mathbf{E}$ auf dem Rand $F(V)$ bekannt. Dann kann die elektrische Feldstärke aufgrund der Linearität der Ausgangsgleichungen 3.3.1 durch eine lineare Vektortransformation aus diesen vorgegebenen Größen berechnet werden.

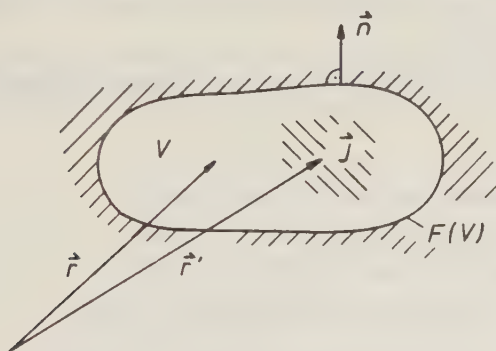


Abbildung 3.3.1: Zur Definition des Lösungsgebietes V

Eine solche Vektortransformation kann immer als Multiplikation der Ausgangsgrößen mit einem Tensor 2. Stufe angeschrieben werden. Dieser Tensor muß sowohl von dem Quellpunktsvektor $\mathbf{r}'$ als auch von dem Aufpunktsvektor $\mathbf{r}$ abhängen. Da die felderzeugenden Größen zudem räumlich bzw. flächenhaft verteilt sind, ist zusätzlich über die Quellpunktskoordinaten zu integrieren. Setzt man nun aufgrund dieser Überlegungen eine Integraldarstellung der elektrischen Feldstärke mit einem Tensor $\underline{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ an, so zeigt sich ([20, Anhang D]), daß $\underline{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ der Differentialgleichung

$$\nabla \times \nabla \times \underline{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \kappa^2 \underline{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -j\omega\mu \underline{\mathbb{I}} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3.3.3)$$

genügen muß. Die Größe $\mathbf{I}$ ist hierbei der Einheitstensor, der dadurch definiert ist, daß für einen beliebigen Vektor $\mathbf{p}$ gilt

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{p} \quad .$$

Der noch nicht definierte Tensor $\nabla \times \underline{\mathbf{L}}$ ist so zu verstehen, daß für jeden beliebigen, ortsunabhängigen Vektor $\mathbf{p}$ gilt

$$[\nabla \times \underline{\mathbf{L}}] \cdot \mathbf{p} = \nabla \times [\underline{\mathbf{L}} \cdot \mathbf{p}] \quad .$$

Entsprechendes gilt dann auch für die doppelte Rotation von $\underline{\mathbf{L}}$.

Die Inhomogenität der Differentialgleichung 3.3.3 ist, wie bei der Differentialgleichung der skalaren Greenschen Funktion ([20]), im wesentlichen durch eine δ -Funktion gegeben. Man bezeichnet $\underline{\mathbf{L}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ deshalb auch als tensorielle Greensche Funktion.

Zur Herleitung der vollständigen Felddarstellung wird Gl. 3.3.3 zunächst von rechts skalar mit einem konstanten, aber sonst beliebigen Vektor $\mathbf{p}$ multipliziert. Das Produkt aus dem Tensor $\underline{\mathbf{L}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ mit $\mathbf{p}$ liefert einen Vektor den wir hier mit

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') := \underline{\mathbf{L}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{p} \quad (3.3.4)$$

abkürzen. Man erhält dann die Differentialgleichung

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \kappa^2 \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -j\omega\mu \mathbf{p} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad . \quad (3.3.5)$$

Identifiziert man nun in dem vektoriellen Greenschen Theorem ([20])

$$\iiint_V \{ \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{B}) - \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{A}) \} dv =$$

$$\iint_F \mathbf{n} \cdot \{ \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\nabla \times \mathbf{B}) \} df$$

den Vektor $\mathbf{A}$ mit $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ und den Vektor $\mathbf{B}$ mit $\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ und nutzt dann die Differentialgleichungen 3.3.2 und 3.3.5 aus, so ergibt sich für das Volumenintegral

$$\iiint_V \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot [\nabla \times \nabla \times \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] - \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot [\nabla \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})] \} dv =$$

$$\iiint_V \{ \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot [\kappa^2 \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - j\omega\mu \mathbf{p} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] - \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot [\kappa^2 \mathbf{E}(\mathbf{r}) - j\omega\mu \mathbf{J}(\mathbf{r})] \} =$$

$$-j\omega\mu \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{p} + j\omega\mu \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') dv \quad .$$

Hierbei ist noch die Filtereigenschaft der δ -Funktion benutzt worden.
Für das Flächenintegral erhält man den Ausdruck

$$\iint_F \mathbf{n} \cdot \{ \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \times [\nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})] - \mathbf{E}(\mathbf{r}) \times [\nabla \times \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \} d\mathbf{f} \quad .$$

Man vertauscht nun zweckmäßig in dem ersten Teil des Integranden die beiden Multiplikanden des Kreuzproduktes und wendet dann auf beide Terme die Spatproduktregel an, um die Anteile, in denen der Greensche Tensor enthalten ist, von den anderen Anteilen zu trennen. Es ergibt sich dann der Ausdruck

$$- \iint_F \{ [\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})] \cdot \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + [\mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})] \cdot [\nabla \times \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \} d\mathbf{f}$$

Durch Gleichsetzen des Volumenintegrals mit dem Flächenintegral und Einsetzen der Definition von $\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ erhält man dann nach einer einfachen Umstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{p} &= \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}) \cdot \underline{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{p} \, dv \\ &+ \frac{1}{j\omega\mu} \iint_F \{ [\mathbf{n} \times \nabla \times \mathbf{E}(\mathbf{r})] \cdot \underline{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{p} \} d\mathbf{f} + \\ &+ \frac{1}{j\omega\mu} \iint_F \{ [\mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r})] \cdot [\nabla \times \underline{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] \cdot \mathbf{p} \} d\mathbf{f} \quad . \end{aligned}$$

In dieser Gleichung können nun die gestrichenen und die ungestrichenen Variablen miteinander vertauscht werden. Zudem kann der konstante Vektor $\mathbf{p}$ zunächst nach rechts aus den Integralen herausgezogen und dann, da er beliebig vorgegeben werden kann, auch weggelassen werden. Man erhält so die gesuchte Integraldarstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \underline{\Gamma}(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) \, dv' + \\ &\frac{1}{j\omega\mu} \iint_F \{ (\mathbf{n}' \times \nabla' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')) \cdot \underline{\Gamma}(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) + (\mathbf{n}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')) \cdot \nabla' \times \underline{\Gamma}(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) \} d\mathbf{f}' \quad . \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

Damit hat man eine Darstellung des elektrischen Feldes über seine Quellen (Volumenintegral) und seine Randwerte (Flächenintegral) gefunden. Die Randwerte können dabei z.B. durch Quellen außerhalb des Lösungsgebietes erzeugt werden.

Wollte man diese Darstellung direkt zur Berechnung des Feldes benutzen, so müßten die Tangentialkomponenten sowohl der elektrischen Feldstärke $\mathbf{E}$ als auch der Rotation von $\mathbf{E}$, also die der magnetischen Feldstärke $\mathbf{H}$, auf dem Rand $F(V)$ bekannt sein. In der Regel kennt man aber nur einen dieser Randwerte oder kann für diesen eine brauchbare Näherung angeben. Es ist deshalb zweckmäßig, die hier noch frei wählbare Randbedingung für den Greenschen Tensor so festzulegen, daß immer einer der beiden Terme in dem Flächenintegral in Gl. 3.3.6 verschwindet.

Wählt man z. B.

$$\underline{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \underline{\Gamma}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

mit

$$\mathbf{n} \times \underline{\Gamma}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad (3.3.7)$$

für $\mathbf{r} \in F(V)$, so gilt

$$\begin{aligned} [\mathbf{n}' \times (\nabla' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}'))] \cdot \underline{\Gamma}_e(\mathbf{r}', \mathbf{r}) &= - [(\nabla' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')) \times \mathbf{n}'] \cdot \underline{\Gamma}_e(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \\ &= - (\nabla' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')) \cdot [\mathbf{n}' \times \underline{\Gamma}_e(\mathbf{r}', \mathbf{r})] \\ &= 0 \quad , \end{aligned}$$

da $\mathbf{r}' \in F(V)$.

Für die elektrische Feldstärke erhält man damit die Darstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \underline{\Gamma}_e(\mathbf{r}', \mathbf{r}) dv' + \\ &+ \frac{1}{j\omega\mu} \iint_F [\mathbf{n}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \cdot [\nabla' \times \underline{\Gamma}_e(\mathbf{r}', \mathbf{r})] df' \quad , \quad (3.3.8) \end{aligned}$$

bei der in dem Flächenintegral lediglich die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke benötigt werden.

Sind dagegen die Komponenten der magnetischen Feldstärke, bei einer ideal leitenden Berandung also die Flächenströme, vorgegeben, so wählt man zweckmäßig

$$\underline{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \underline{\Gamma}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

mit

$$\mathbf{n} \times [\nabla \times \underline{\mathbb{L}}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] = 0 \quad (3.3.9)$$

für $\mathbf{r} \in F(V)$, und erhält dann die Felddarstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = & \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \underline{\mathbb{L}}_m(\mathbf{r}', \mathbf{r}) dv' + \\ & + \frac{1}{j\omega\mu} \iint_F [\mathbf{n}' \times (\nabla' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}'))] \cdot \underline{\mathbb{L}}_m(\mathbf{r}', \mathbf{r}) df' \end{aligned} \quad , (3.3.10)$$

da

$$\begin{aligned} [\mathbf{n}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \cdot [\nabla' \times \underline{\mathbb{L}}_m(\mathbf{r}', \mathbf{r})] &= - [\mathbf{E}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}'] \cdot [\nabla' \times \underline{\mathbb{L}}_m(\mathbf{r}', \mathbf{r})] \\ &= - \mathbf{E}(\mathbf{r}') \cdot \{\mathbf{n}' \times [\nabla' \times \underline{\mathbb{L}}_m(\mathbf{r}', \mathbf{r})]\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

für $\mathbf{r}' \in F(V)$.

Unter der Voraussetzung, daß der Greensche Tensor einer der beiden Randbedingungen 3.3.7 oder 3.3.9 genügt, kann noch die Symmetriebeziehung ([20])

$$\underline{\mathbb{L}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \underline{\mathbb{L}}^T(\mathbf{r}', \mathbf{r}) \quad (3.3.11)$$

hergeleitet werden. Dabei ist unter $\underline{\mathbb{L}}^T$ der transponierte Tensor zu verstehen, der in der Matrizenschreibweise aus dem Tensor $\underline{\mathbb{L}}$ durch vertauschen der Zeilen mit den Spalten hervorgeht. Gleichung 3.3.11 erweist sich als nützlich bei dem Umgang mit den vorgestellten Felddarstellungen.

Bei der Angabe der Randbedingungen für den Greenschen Tensor haben wir bisher vorausgesetzt, daß die Berandung $F(V)$ des Lösungsgebietes sich ganz im Endlichen befindet. Diese Voraussetzung ist bei den hier betrachteten Randwertproblemen nur für einen Teilbereich der Berandung erfüllt (vgl. Kap. 2.1). Der Rand des Lösungsgebietes ist hier zum einen durch den Kegelmantel $\vartheta = \vartheta_0$ und zum anderen durch die Oberfläche der Fernkugel ($r_0 \rightarrow \infty$, Abb. 3.3.2) vorgegeben.

Auf dem Kegelmantel wird man für den Greenschen Tensor, je nach Problemstellung, eine der beiden Randbedingungen nach Gl. 3.3.7 bzw. 3.3.9 fordern. Auf der Oberfläche der Fernkugel muß dagegen sichergestellt werden, daß sich das resultierende elektromagnetische Feld dort wie eine auslaufende Kugelwelle verhält, also der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung genügt.

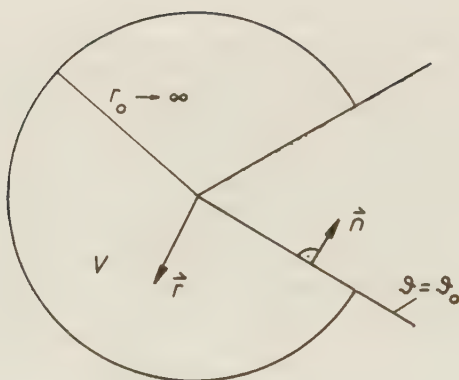


Abbildung 3.3.2: Zur Festlegung der Berandung des Lösungsgebietes bei den betrachteten Randwertproblemen

Aus der letzten Bedingung folgt, daß immer dann, wenn die Quellen des Feldes nicht auf der Fernkugel selbst liegen, der Anteil des Feldintegrals, der von der Fernkugel herrührt, verschwindet. Legt man die Quellen des Feldes ins Unendliche — also auf die Fernkugel —, so bedeutet dies, daß man auf den Kegel eine ebene Welle einfallen läßt. Wie in diesem Fall das Feldintegral zu interpretieren ist, wird in Kap. 5 ausführlich erläutert. Da diese Überlegungen bei der Herleitung des Greenschen Tensors nicht relevant sind, können wir hier zunächst annehmen, daß alle Feldquellen im Endlichen liegen.

Bis hierher haben wir lediglich eine Darstellung des elektrischen Feldes als Integral über die felderzeugenden Quellen und Randwerte hergeleitet. Unser Ziel ist es aber eine Reihenentwicklung des Feldes nach den in Kap. 3.1 hergeleiteten Lösungen der vektoriellen Helmholtzgleichung aufzustellen. Um diese aus der Integraldarstellung zu erhalten, entwickelt man nun den Greenschen Tensor nach genau diesen vektoriellen Lösungsfunktionen.

In Kap. 3.4 wird der Greensche Tensor des elliptischen Kegels $\mathcal{L}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ hergeleitet, der der Differentialgleichung 3.3.3, der Randbedingung 3.3.7 bei $\vartheta = \vartheta_0$ und der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung genügt. Da für die Anwendung des Greenschen Tensors lediglich das Ergebnis dieser Rechnung von Interesse ist, wollen wir dieses hier ohne Herleitung vorwegnehmen. Den Ten-

son $\underline{\Gamma}_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ geben wir hier nicht explizit an, da er in der Folge nicht mehr benutzt wird.

Unter der Voraussetzung, daß das Feld ausschließlich für Aufpunkte berechnet wird, die außerhalb der stromführenden Bereiche und auch nicht auf dem Rand $F(V)$ liegen, kann für den Greenschen Tensor die Darstellung

$$\begin{aligned} \underline{\Gamma}_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \\ - \kappa \omega \mu \left\{ \frac{1}{\kappa^2} [\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla)] [\nabla' \times (\mathbf{r}' \times \nabla')] T_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + (\mathbf{r} \times \nabla)(\mathbf{r}' \times \nabla') T_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

mit

$$T_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_i \frac{j_{p_i}(\kappa r_<) h_{p_i}^{(2)}(\kappa r_>)}{p_i(p_i + 1)} Y_{p_i}(\vartheta, \varphi) Y_{p_i}(\vartheta', \varphi') \quad (3.3.13)$$

und

$$T_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \sum_i \frac{j_{q_i}(\kappa r_<) h_{q_i}^{(2)}(\kappa r_>)}{q_i(q_i + 1)} Y_{q_i}(\vartheta, \varphi) Y_{q_i}(\vartheta', \varphi') \quad (3.3.14)$$

angegeben werden. Die Größen $r_<$ und $r_>$ sind dabei durch

$$r_< = \begin{cases} r & \text{für } r < r' \\ r' & \text{für } r > r' \end{cases} \quad r_> = \begin{cases} r' & \text{für } r < r' \\ r & \text{für } r > r' \end{cases} \quad (3.3.15)$$

definiert. Die Funktion T_D genügt der Dirichlet- und T_N der v. Neumann-Bedingung bei $\vartheta = \vartheta_0$.

In dieser Schreibweise des Greenschen Tensors treten die Operatorprodukte

$$[\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla)] [\nabla' \times (\mathbf{r}' \times \nabla')] \quad (3.3.16)$$

und

$$(\mathbf{r} \times \nabla)(\mathbf{r}' \times \nabla') \quad (3.3.17)$$

auf, die hier als dyadische Vektorprodukte zu verstehen sind, weshalb man $\underline{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ auch als dyadische Greensche Funktion oder kurz als Greensche Dyade bezeichnet. Wir wollen kurz erläutern, was unter einem dyadischen Vektorprodukt zu verstehen ist. Da an dieser Stelle nur eine sehr knappe Darstellung gegeben werden kann, möchte ich hier auf einige einführende Abhandlungen zu diesem Thema verweisen. Eine der anschaulichsten Darstellungen findet

man in der Originalarbeit von Gibbs ([27]), in der erstmals der Begriff der Dyade eingeführt und eine Dyadenalgebra entwickelt wird. Weitere Darstellungen findet man in dem Buch von Borgnis und Papas [20, Anhang C] und bei Chen [22, ch. 1].

Nach Gibbs versteht man unter einer Dyade $\underline{\Phi}$ im engeren Sinn (engl. *dyad*) einen speziellen Tensor 2. Stufe, der durch die Angabe zweier Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ vollständig bestimmt ist. Man schreibt die Dyade $\underline{\Phi}$ als formales Produkt

$$\underline{\Phi} := \mathbf{a}\mathbf{b} \quad (3.3.18)$$

der Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$.

Dieses Produkt wird als dyadisches Vektorprodukt bezeichnet. Man erhält aus dieser Produktdarstellung die Matrizennotation des Tensors $\underline{\Phi}$, indem man $\mathbf{a}$ als Spaltenvektor und $\mathbf{b}$ als Zeilenvektor auffaßt, und das Produkt in Gl. 3.3.18 als Matrizenprodukt ausführt.

Ein beliebiger Tensor kann nun immer in eine Summe über Matrizen zerlegt werden, die jede für sich als dyadisches Vektorprodukt geschrieben werden können. Eine solche Summe bezeichnet man dann als Dyade im erweiterten Sinn (engl. *dyadic*). Da die Unterscheidung zwischen einer Dyade im engeren und einer Dyade im erweiterten Sinn hier keine wesentliche inhaltliche Bedeutung hat, werden wir in der Folge beide einfach als Dyade bezeichnen. Für Dyaden ist ein Skalarprodukt mit einem Vektor definiert, wobei zwischen einer Prae- und einer Postmultiplikation zu unterscheiden ist:

$$\begin{aligned} \text{Praemultiplikation:} \quad & \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a}\mathbf{b}) := (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} \\ \text{Postmultiplikation:} \quad & (\mathbf{a}\mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} := \mathbf{a}(\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

Das Ergebnis dieses Skalarproduktes ist also ein Vektor. Im Gegensatz dazu liefert das Kreuzprodukt einer Dyade mit einem Vektor wieder eine Dyade. Man unterscheidet auch hier wieder nach der Reihenfolge der Multiplikationen und definiert

$$\begin{aligned} \text{Praemultiplikation:} \quad & \mathbf{c} \times (\mathbf{a}\mathbf{b}) := (\mathbf{c} \times \mathbf{a})\mathbf{b} \\ \text{Postmultiplikation:} \quad & (\mathbf{a}\mathbf{b}) \times \mathbf{c} := \mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \end{aligned} \quad (3.3.20)$$

Die Multiplikation einer Dyade mit einer skalaren Größe ist so zu verstehen, daß einer der beiden Vektoren mit dem Skalar multipliziert wird. Hier muß dann selbstverständlich nicht nach der Reihenfolge der Multiplikationen unterschieden werden.

Zu einer Dyade $\underline{\Phi} = \mathbf{ab}$ wird schließlich noch eine transponierte Dyade $\underline{\Phi}^T$ durch

$$\underline{\Phi}^T = (\mathbf{ab})^T := \mathbf{ba} \quad (3.3.21)$$

definiert. Man kann sich leicht überlegen, daß diese Definition mit der üblichen Definition einer transponierten Matrix konsistent ist.

Selbstverständlich sind alle Definitionen und Rechenregeln der Dyadenalgebra konsistent zu den Regeln der Matrizenalgebra, die üblicherweise bei dem Umgang mit Tensoren verwendet wird. Das Konzept der Dyadenrechnung hat aber gegenüber der Matrixschreibweise den wesentlichen Vorteil, daß Vektortransformationen weitgehend koordinatenfrei dargestellt und dabei die Regeln der Vektoralgebra benutzt werden können. Bei der Matrixschreibweise muß man sich dagegen meist auf ein spezielles Koordinatensystem beziehen, was insbesondere in krummlinigen Koordinatensystemen zu nicht mehr überschaubaren Ausdrücken führen kann.

Dies kann anhand der dyadischen Operatoren 3.3.16 und 3.3.17 verdeutlicht werden. Die dort auftretenden dyadischen Produkte sind, da die Vektoroperatoren zum einen auf gestrichene und zum anderen auf ungestrichene Koordinaten wirken, als gewöhnliche dyadische Vektorprodukte aufzufassen. Allerdings kann man diese Dyaden nur in kartesischen Koordinaten als Matrix schreiben, da in einem krummlinigen Koordinatensystem die Komponentenzerlegung der Operatoren ortsabhängig ist, und damit die gestrichenen und die ungestrichenen Operatoren nach unterschiedlichen Koordinatenrichtungen zerlegt werden. Natürlich kann man diese Zerlegungen auch so umrechnen, daß eine Matrixschreibweise möglich wird. Dies ist in krummlinigen Koordinatensystemen aber äußerst umständlich und bei der Anwendung der Dyade eher hinderlich.

Anhand der Darstellung nach Gl. 3.3.12 kann auch die Symmetrieeigenschaft der Greenschen Dyade abgelesen werden. Vertauscht man in Gl. 3.3.12 nämlich die gestrichenen und die ungestrichenen Variablen, so wird lediglich die Reihenfolge der Vektoroperatoren vertauscht, also nach Gl. 3.3.21 die transponierte Dyade gebildet. Dies entspricht genau der Symmetriebeziehung 3.3.11.

Ebenfalls anhand dieser Darstellung kann auch der enge Zusammenhang der Greenschen Dyade mit der skalaren Greenschen Funktion verdeutlicht werden ([18], [59]). Bis auf einen konstanten Faktor gehen die Funktionen T_D und T_N nämlich aus der Reihenentwicklung der entsprechenden skalaren Greenschen

Funktion dadurch hervor, daß man in dieser Entwicklung jeden Summanden durch den Eigenwert $p_i(p_i + 1)$ bzw. $q_i(q_i + 1)$ dividiert.

Für die Auswertung der Greenschen Dyade ist es häufig zweckmäßig, diese in einer etwas anderen Form darzustellen ([37],[52],[60]). Durch Vertauschen von Differentiation und Summation in Gl. 3.3.12 erhält man eine Entwicklung der Greenschen Dyade nach den in Kap. 3.1 hergeleiteten Partikulärlösungen der homogenen, vektoriellen Helmholtzgleichung:

$$\Gamma_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\kappa\omega\mu \left\{ \sum_i \frac{\mathbf{M}_{q_i}^{(2)}(\mathbf{r})\mathbf{M}_{q_i}^{(1)}(\mathbf{r}')}{q_i(q_i + 1)} + \sum_i \frac{\mathbf{N}_{p_i}^{(2)}(\mathbf{r})\mathbf{N}_{p_i}^{(1)}(\mathbf{r}')}{p_i(p_i + 1)} \right\}, \quad |\mathbf{r}| > |\mathbf{r}'| \quad (3.3.22)$$

$$\Gamma_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\kappa\omega\mu \left\{ \sum_i \frac{\mathbf{M}_{q_i}^{(1)}(\mathbf{r})\mathbf{M}_{q_i}^{(2)}(\mathbf{r}')}{q_i(q_i + 1)} + \sum_i \frac{\mathbf{N}_{p_i}^{(1)}(\mathbf{r})\mathbf{N}_{p_i}^{(2)}(\mathbf{r}')}{p_i(p_i + 1)} \right\}, \quad |\mathbf{r}| < |\mathbf{r}'| \quad (3.3.23)$$

Der obere Index (2) bedeutet hier, daß für die sphärische Zylinderfunktion die Hankelfunktion 2. Art eingesetzt werden muß, während der obere Index (1) den Gebrauch der sphärischen Besselfunktion impliziert.

Von dieser Darstellung der Greenschen Dyade werden wir bei den Feldberechnungen in Kap. 4 ausgehen. Es sei hier lediglich noch erwähnt, daß die Dyade $\Gamma_m(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$, die sich von $\Gamma_e(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ nur durch die Randbedingung auf dem Kegelmantel unterscheidet, eine mit Gl. 3.3.12 fast identische Reihenentwicklung besitzt. Es müssen dort lediglich die Funktionen T_D und T_N miteinander vertauscht werden.

3.4 Die Greensche Dyade des elliptischen Kegels

Bei der Herleitung der Reihenentwicklung der Greenschen Dyade kann auf unterschiedliche Art und Weise vorgegangen werden. Ein mögliches Verfahren, bei dem von dem vektoriellen Greenschen Theorem ausgegangen wird, ist in [52] für den Fall des Sektors angewendet und in [37] für den elliptischen Kegel verallgemeinert worden. Wir werden hier allerdings eine Methode verwenden, die sich an die in [10] gegebene Darstellung anlehnt. Diese Vorgehensweise hat den Vorzug, daß man zumindest einen Ansatz für den Fall gewinnt, daß sich der Aufpunkt in dem stromführenden Teil des Lösungsgebietes befindet. Zudem wird bei diesem Verfahren unmittelbar der Zusammenhang zwischen der dyadischen und der skalaren Greenschen Funktion erkennbar.

Ausgangspunkt der Herleitung ist die in Kap. 3.3 angegebene Differentialgleichung der Greenschen Dyade $\underline{\underline{L}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ und die Randbedingung, der $\underline{\underline{L}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ auf dem Kegelmantel genügen muß. Da der Umgang mit Dyaden in der Regel komplizierter ist als der Umgang mit Vektoren, werden wir nicht direkt die Greensche Dyade sondern zuerst den bereits in Kap. 3.3 benutzten Vektor $\mathbf{G}$ (Gl. 3.3.4) bestimmen. Die Differentialgleichung und die Randbedingung für $\mathbf{G}$ erhalten wir wieder durch Multiplikation der entsprechenden Gleichungen für $\underline{\underline{L}}$ mit einem konstanten Vektor.

Aus der Inhomogenität der Differentialgleichung kann man nun ablesen, daß die Divergenz von $\mathbf{G}$ nicht verschwindet. Da wir aber eine Reihenentwicklung von $\mathbf{G}$ nach den in Kap. 3.1 hergeleiteten divergenzfreien Lösungen der vektoriellen Helmholtzgleichung suchen, ist es zweckmäßig, statt $\mathbf{G}$ zunächst dessen Rotation zu bestimmen. Wird werden zeigen, daß der Vektor $\mathbf{K} := \nabla \times \mathbf{G}$, ebenfalls einer vektoriellen Helmholtzgleichung genügt, und daß man $\mathbf{G}$ auf einfache Weise aus $\mathbf{K}$ bestimmen kann.

Für $\mathbf{K}$ wird dann ein Ansatz in der Form einer Linearkombination aus den beiden in Kap. 3.1 hergeleiteten Partikulärlösungen der vektoriellen Helmholtzgleichung gemacht. Dabei müssen hier in den beiden Partikulärlösungen unterschiedliche skalare Wellenfunktionen Ψ_1 und Ψ_2 angesetzt werden.

Für diese skalaren Wellenfunktionen müssen dann zunächst aus der vektoriellen Differentialgleichung für $\mathbf{K}$ skalare Differentialgleichungen hergeleitet werden, deren Lösung man mit Hilfe einer Reihenentwicklungen nach den Partikulärlösungen der homogenen, skalaren Helmholtzgleichung findet. Die Koeffizienten dieser Entwicklungen bestimmt man dann durch einen Vergleich mit den Reihenentwicklungen der δ -Distribution nach Laméschen Produkten,

die durch die Vollständigkeitsrelationen dieser Funktionensysteme gegeben sind (vgl. Kap. 3.2). Diese Rechnung muß für die Funktionen Ψ_1 und Ψ_2 getrennt durchgeführt werden.

Man erhält so schließlich eine Darstellung des Vektors $\mathbf{K}$, aus der die gesuchte Darstellung der Greenschen Dyade berechnet werden kann. Bei dieser Umrechnung tritt noch ein zusätzlicher singulärer Term auf, der allerdings in den weiteren Rechnungen nicht berücksichtigt werden muß und deshalb hier auch nicht näher untersucht wird.

Wie bereits erwähnt, gehen wir von der Differentialgleichung ³

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \kappa^2 \mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -j\omega\mu \mathbf{I} \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3.4.1)$$

aus. Die Größe $\mathbf{I}$ steht hier wieder für die Einheitsdyade.

Zusätzlich muß die Greensche Dyade der Randbedingung

$$\mathbf{n} \times \mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad \text{für } \mathbf{r} \text{ auf dem Kegelmantel} \quad (3.4.2)$$

genügen.

Im allgemeinen ist es einfacher, statt der dyadischen Differentialgleichung 3.4.1 eine vektorielle Gleichung zu lösen. Man multipliziert deshalb Gl. 3.4.1 von rechts skalar mit einem beliebigen, ortsunabhängigen Vektor $\mathbf{p}'$, und bestimmt zunächst die Vektorfunktion

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') := \mathbf{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \cdot \mathbf{p}' \quad ,$$

die der inhomogenen, vektoriellen Helmholtzgleichung

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \kappa^2 \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -j\omega\mu \mathbf{p}' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3.4.3)$$

und der Randbedingung

$$\mathbf{n} \times \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad (3.4.4)$$

für $\mathbf{r}$ auf dem Kegelmantel, genügen muß.

Wendet man nun auf Gl. 3.4.3 den Divergenzoperator an, so ergibt sich

$$-\kappa^2 \nabla \cdot \mathbf{G} = -j\omega\mu \nabla \cdot [\mathbf{p}' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \quad .$$

³Wir verzichten hier auf den Index e bei der Bezeichnung der Greenschen Dyade, da wir in der Folge ausschließlich die Dyade zu der Randbedingung 3.4.2 benutzen.

Der Vektor $\mathbf{G}$ ist somit kein reines Wirbelfeld. Da wir aber eine Entwicklung der Greenschen Dyade nach divergenzfreien Lösungen der vektoriellen Helmholtzgleichung suchen, ist es zweckmäßig statt $\mathbf{G}$ zunächst den Vektor

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') := \nabla \times \mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad . \quad (3.4.5)$$

zu bestimmen, der in jedem Fall als Rotor einer Vektorfunktion divergenzfrei ist.

Nach Gl. 3.4.3 kann dann $\mathbf{G}$ aus der Beziehung

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{j\omega\mu}{\kappa^2} \mathbf{p}' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \frac{1}{\kappa^2} \nabla \times \mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (3.4.6)$$

berechnet werden.

Für die Funktion $\mathbf{K}$ erhält man durch Anwendung der Rotation auf Gl. 3.4.3 die Differentialgleichung

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - \kappa^2 \mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -j\omega\mu \nabla \times [\mathbf{p}' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \quad . \quad (3.4.7)$$

Betrachtet man desweiteren Gl. 3.4.6 für Aufpunkte $\mathbf{r}$ auf dem Kegelmantel und multipliziert diese Gleichung von links vektoriell mit dem Normalenvektor $\mathbf{n}$, so kann unter Berücksichtigung der Bedingung 3.4.4 die Randbedingung

$$\mathbf{n} \times [\nabla \times \mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] = -j\omega\mu \mathbf{n} \times \mathbf{p}' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad . \quad (3.4.8)$$

hergeleitet werden. Für $\mathbf{r}' \neq \mathbf{r}$, also für den Fall, daß Aufpunkt und Quellpunkt nicht beide auf dem Kegelmantel liegen, ist die rechte Seite von Gl. 3.4.8 identisch Null. Gleichung 3.4.8 kann dann durch die homogene Randbedingung

$$\mathbf{n} \times [\nabla \times \mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')] = 0 \quad \text{für } \mathbf{r} \text{ auf dem Kegelmantel} \quad (3.4.9)$$

ersetzt werden. Tritt bei der Lösung einer Randwertaufgabe der Fall auf, daß Aufpunkt und Quellpunkt beide auf dem Kegelmantel liegen, so ist ein zusätzlicher singulärer Term in der Vektorfunktion $\mathbf{K}$ zu berücksichtigen. Dies tritt aber bei den in dieser Arbeit behandelten Randwertproblemen nicht auf. Aufgrund dieser Überlegungen, suchen wir also eine Lösung der vektoriellen Differentialgleichung 3.4.7, die der Randbedingung 3.4.9 genügt. Da die Differentialgleichung 3.4.7 fast überall in dem Lösungsraum, genauer gesagt für alle Aufpunkte $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$, mit der homogenen, vektoriellen, Helmholtzgleichung

übereinstimmt, und zusätzlich $\mathbf{K}$ eine divergenzfreie Funktion ist, können wir gemäß den Ausführungen in Kap. 3.1 für $\mathbf{K}$ den Ansatz

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = (\mathbf{r} \times \nabla) \Psi_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + [\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla)] \Psi_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad (3.4.10)$$

machen. Die skalaren Funktionen Ψ_1 und Ψ_2 sind dabei noch zu bestimmen. Hierzu wird Gl. 3.4.7 zunächst in einer anderen Form angeschrieben. Da für $\mathbf{K}$ gilt

$$\nabla \cdot \mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = 0 \quad , \quad (3.4.11)$$

kann man die doppelte Rotation auch als

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{K} = \nabla \nabla \cdot \mathbf{K} - \nabla^2 \mathbf{K} = -\nabla^2 \mathbf{K}$$

schreiben und erhält damit aus Gl. 3.4.7 die Differentialgleichung

$$\nabla^2 \mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \kappa^2 \mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = j\omega\mu \nabla \times [\mathbf{p}' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \quad . \quad (3.4.12)$$

Gleichung 3.4.12 ist die Ausgangsgleichung für die Herleitung der Differentialgleichungen für Ψ_1 und Ψ_2 . Man erhält daraus skalare Differentialgleichungen für die beiden Wellenfunktionen, die man mit Hilfe eines Reihenansatzes löst. Wir werden diese Rechnung hier zunächst für Ψ_1 ausführen.

Zum Zweck der Aufstellung einer Differentialgleichung für Ψ_1 wendet man auf Gl. 3.4.12 skalar den Operator $(\mathbf{r} \times \nabla)$ an, und erhält

$$(\mathbf{r} \times \nabla) \cdot \nabla^2 \mathbf{K} + \kappa^2 (\mathbf{r} \times \nabla) \cdot \mathbf{K} = j\omega\mu (\mathbf{r} \times \nabla) \cdot \nabla \times [\mathbf{p}' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \quad . \quad (3.4.13)$$

Auf der linken Seite dieser Differentialgleichung kann man dann mit Gl. A1.1 f) schreiben

$$(\mathbf{r} \times \nabla) \cdot \nabla^2 \mathbf{K} = \nabla^2 [(\mathbf{r} \times \nabla) \cdot \mathbf{K}] \quad , \quad (3.4.14)$$

und weiterhin mit Gl. A1.1 h)

$$\begin{aligned} (\mathbf{r} \times \nabla) \cdot \mathbf{K} &= (\mathbf{r} \times \nabla) \cdot (\mathbf{r} \times \nabla) \Psi_1 + (\mathbf{r} \times \nabla) \cdot [\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla)] \Psi_2 \\ &= (\mathbf{r} \times \nabla)^2 \Psi_1 \quad . \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

Die rechte Seite von Gl. 3.4.13 formt man zweckmäßig so um, daß dort nur

noch nach gestrichenen Koordinaten differenziert wird. Es gilt

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{r} \times \nabla) \cdot \nabla \times [\mathbf{p}' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] &= -(\mathbf{r} \times \nabla) \cdot \nabla' \times [\mathbf{p}' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \\
 &= -[(\mathbf{r} \times \nabla) \times \nabla'] \cdot [\mathbf{p}' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \\
 &= [\nabla' \times (\mathbf{r} \times \nabla)] \cdot [\mathbf{p}' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \\
 &= \mathbf{p}' \cdot [\nabla' \times (\mathbf{r} \times \nabla)] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \\
 &= -\mathbf{p}' \cdot [\nabla' \times (\mathbf{r}' \times \nabla')] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad ,
 \end{aligned}$$

so daß man schließlich aus Gl. 3.4.13 die Differentialgleichung

$$\nabla^2 (\mathbf{r} \times \nabla)^2 \Psi_1 + \kappa^2 (\mathbf{r} \times \nabla)^2 \Psi_1 = -j\omega\mu \mathbf{p}' \cdot [\nabla' \times (\mathbf{r}' \times \nabla')] \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad . \quad (3.4.16)$$

erhält.

Um die Lösungsfunktion eindeutig festzulegen, benötigt man neben der Differentialgleichung noch eine Randbedingung. Diese findet man mit Hilfe der Randbedingung 3.4.9. Setzt man dort den Ansatz 3.4.10 ein, so erhält man die Bedingung

$$\mathbf{n} \times [\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla) \Psi_1] + \mathbf{n} \times [\nabla \times \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla) \Psi_2] = 0 \quad . \quad (3.4.17)$$

Da die beiden Vektorfunktionen auf der linken Seite von Gl. 3.4.17 linear unabhängig sind, muß jede für sich der Randbedingung genügen. Für den Anteil, der die Funktion Ψ_1 enthält, muß also gelten

$$\mathbf{n} \times [\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla) \Psi_1] = 0 \quad . \quad (3.4.18)$$

Die Komponenten des Vektoroperators in dieser Gleichung sind mit den Komponenten der $\mathbf{N}$ -Funktion identisch, die man aus Tab. 3.1.1 ablesen kann. ⁴ Anhand dieser Komponententabelle erkennt man, daß Ψ_1 der Randbedingung

$$\Psi_1(r, \vartheta, \varphi; r', \vartheta', \varphi')|_{\vartheta=\vartheta_0} = 0 \quad (3.4.19)$$

⁴In dieser Tabelle ist für die skalare Wellenfunktion bereits ein spezifischer Ansatz gemacht worden. Wir werden zeigen, daß die Funktion Ψ_1 zumindest bereichsweise aus genau den dort verwendeten Partikulärlösungen der homogenen Helmholtzgleichung aufgebaut werden kann.

genügen muß.

Aus der Differentialgleichung 3.4.16 folgt nun, daß die Funktion $(\mathbf{r} \times \nabla)^2 \Psi_1$ zumindest für $r < r'$ und für $r > r'$ der homogenen, skalaren Helmholtzgleichung genügt. Man macht für Ψ_1 deshalb den Ansatz

$$\Psi_1(r, \vartheta, \varphi; r', \vartheta', \varphi') = \sum_i A_{p_i}(r, r'; \vartheta', \varphi') Y_{p_i}(\vartheta, \varphi) \quad (3.4.20)$$

mit

$$(\mathbf{r} \times \nabla)^2 Y_{p_i}(\vartheta, \varphi) = -p_i(p_i + 1) Y_{p_i}(\vartheta, \varphi)$$

und

$$Y_{p_i}(\vartheta, \varphi)|_{\vartheta=\vartheta_0} = 0$$

In diesem Ansatz ist noch die Funktion $A_{p_i}(r, r'; \vartheta', \varphi')$ zu bestimmen. Dazu setzt man auf der linken Seite von Gl. 3.4.16 den Ansatz für Ψ_1 und auf der rechten Seite die Vollständigkeitsrelation (Gl. 3.2.14)

$$\frac{1}{s_\vartheta s_\varphi} \delta(\vartheta - \vartheta') \delta(\varphi - \varphi') = \sum_i Y_{p_i}(\vartheta, \varphi) Y_{p_i}(\vartheta', \varphi')$$

ein und erhält dann

$$\begin{aligned} & - \left(\nabla^2 + \kappa^2 \right) \sum_i p_i(p_i + 1) A_{p_i}(r, r'; \vartheta', \varphi') Y_{p_i}(\vartheta, \varphi) = \\ & - j\omega\mu \sum_i \mathbf{p}' \cdot [\nabla' \times (\mathbf{r}' \times \nabla')] \frac{1}{r'^2} \delta(r - r') Y_{p_i}(\vartheta', \varphi') Y_{p_i}(\vartheta, \varphi) \end{aligned} \quad (3.4.21)$$

Aufgrund der speziellen Struktur der rechten Seite in dieser Gleichung setzt man für A_{p_i} an

$$A_{p_i}(r, r'; \vartheta', \varphi') = \frac{j\omega\mu}{p_i(p_i + 1)} \mathbf{p}' \cdot [\nabla' \times (\mathbf{r}' \times \nabla')] g_{p_i}(r, r') Y_{p_i}(\vartheta', \varphi') \quad (3.4.22)$$

wobei die Funktion $g_{p_i}(r, r')$ noch zu bestimmen ist.

Zur Bestimmung von g_{p_i} wird dann die explizite Darstellung des Operators

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} (\mathbf{r} \times \nabla)^2$$

eingesetzt. Darüberhinaus nutzt man aus, daß die Operatoren $(\nabla^2 + \kappa^2)$ und $\mathbf{p}' \cdot [\nabla' \times (\mathbf{r}' \times \nabla')]$ vertauschbar sind, da sie auf unterschiedliche Koordinaten wirken. Aus Gl. 3.4.21 folgt damit

$$j\omega\mu \sum_i \mathbf{p}' \cdot [\nabla' \times (\mathbf{r}' \times \nabla')] \Phi(r, r') Y_{p_i}(\vartheta, \varphi) Y_{p_i}(\vartheta', \varphi') = 0 \quad (3.4.23)$$

mit

$$\Phi(r, r') = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial g_{p_i}}{\partial r} \right) + \left[\kappa^2 - \frac{p_i(p_i + 1)}{r^2} \right] g_{p_i} - \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \quad .$$

Aufgrund der Orthogonalität der $Y_{p_i}(\vartheta, \varphi)$ (Gl. 3.2.12) muß dann

$$\mathbf{p}' \cdot [\nabla' \times (\mathbf{r}' \times \nabla')] \Phi(r, r') Y_{p_i}(\vartheta', \varphi') = 0 \quad (3.4.24)$$

und, da $\mathbf{p}'$ ein beliebiger, konstanter Vektor ist, muß gelten

$$[\nabla' \times (\mathbf{r}' \times \nabla')] \Phi(r, r') Y_{p_i}(\vartheta', \varphi') = 0 \quad (3.4.25)$$

sein. Hieraus kann nicht unmittelbar geschlossen werden, daß die Funktion $\Phi(r, r')$ identisch verschwindet. Es muß aber jede Komponente der Vektorfunktion auf der linken Seite von Gl. 3.4.25 gleich Null sein. Die r' -Komponente in diesem Ausdruck ist nach Gl. A1.1 j) gegeben durch

$$\frac{r'}{r'^2} (\mathbf{r}' \times \nabla')^2 \Phi(r, r') Y_{p_i}(\vartheta', \varphi') = -\frac{r'}{r'^2} \Phi(r, r') p_i(p_i + 1) Y_{p_i}(\vartheta', \varphi') \quad ,$$

woraus man schließlich doch $\Phi(r, r') = 0$ folgert.

Dies ist aber gleichbedeutend damit, daß $g_{p_i}(r, r')$ der Differentialgleichung

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dg_{p_i}(r, r')}{dr} \right) + \left[\kappa^2 r^2 - p_i(p_i + 1) \right] g_{p_i}(r, r') = \delta(r - r') \quad (3.4.26)$$

genügt. Die Lösung dieser Gleichung kann man zu ([59])

$$g_{p_i}(r, r') = j\kappa j_{p_i}(\kappa r_{<}) h_{p_i}^{(2)}(\kappa r_{>}) \quad , \quad (3.4.27)$$

angeben. Sie ist hier so gewählt, daß die Sommerfeldsche Ausstrahlungsbedingung und die Energiebedingung erfüllt sind.⁵

⁵Zur Definition von $r_{>}$ und $r_{<}$ s. Kap. 3.3. Gl. 3.3.15

Durch Einsetzen in Gl. 3.4.22 und Gl. 3.4.20 erhält man dann für die Funktion Ψ_1 die Reihendarstellung

$$\Psi_1(\mathbf{r}, \vartheta, \varphi; \mathbf{r}', \vartheta', \varphi') = \quad (3.4.28)$$

$$- \kappa \omega \mu \mathbf{p}' \cdot [\nabla' \times (\mathbf{r}' \times \nabla')] \sum_i \frac{j_{p_i}(\kappa r_{<}) h_{p_i}^{(2)}(\kappa r_{>})}{p_i(p_i + 1)} Y_{p_i}(\vartheta, \varphi) Y_{p_i}(\vartheta', \varphi') \quad .$$

Zur vollständigen Bestimmung der Vektorfunktion $\mathbf{K}$ muß nun noch die Funktion Ψ_2 bestimmt werden. Zur Herleitung einer Differentialgleichung für diese Funktion geht man wieder von Gl. 3.4.12 aus und multipliziert diese von links skalar mit dem Ortsvektor $\mathbf{r}$. Damit erhält man

$$\mathbf{r} \cdot \nabla^2 \mathbf{K} + \kappa^2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{K} = j \omega \mu \mathbf{r} \cdot \nabla \times [\mathbf{p}' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \quad . \quad (3.4.29)$$

Mit Gl. A1.1 g) und mit $\nabla \cdot \mathbf{K} = 0$ gilt zudem

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \nabla^2 \mathbf{K} + \kappa^2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{K} &= \nabla^2 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{K}) - 2 \nabla \cdot \mathbf{K} + \kappa^2 \mathbf{r} \cdot \mathbf{K} \\ &= \nabla^2 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{K}) + \kappa^2 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{K}) \quad . \end{aligned} \quad (3.4.30)$$

Setzt man in dieser Gleichung wieder den Ansatz

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = (\mathbf{r} \times \nabla) \Psi_1(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + [\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla)] \Psi_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$$

ein, so erhält man zunächst für $\mathbf{r} \cdot \mathbf{K}$, da $(\mathbf{r} \times \nabla)$ transversal zu $\mathbf{r}$ ist, mit Gl. A1.1 i)

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{K} = \mathbf{r} \cdot (\mathbf{r} \times \nabla) \Psi_1 + \mathbf{r} \cdot [\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla)] \Psi_2 = (\mathbf{r} \times \nabla)^2 \Psi_2 \quad . \quad (3.4.31)$$

Durch Einsetzen in Gl. 3.4.29 ergibt sich dann für Ψ_2 die Differentialgleichung

$$\nabla^2 (\mathbf{r} \times \nabla)^2 \Psi_2 + \kappa^2 (\mathbf{r} \times \nabla)^2 \Psi_2 = j \omega \mu \mathbf{r} \cdot \nabla \times [\mathbf{p}' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \quad (3.4.32)$$

Die rechte Seite dieser Differentialgleichung formt man wieder so um, daß nur noch nach den gestrichenen Variablen differenziert wird. Es gilt dabei

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot \nabla \times [\mathbf{p}' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] &= \mathbf{r} \cdot [\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \nabla \times \mathbf{p}' + (\nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \times \mathbf{p}'] \\ &= \mathbf{r} \cdot [(\nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) \times \mathbf{p}'] \\ &= [\mathbf{r} \times \nabla \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')] \cdot \mathbf{p}' \\ &= -\mathbf{p}' \cdot (\mathbf{r}' \times \nabla') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{aligned}$$

Damit erhält man endgültig die Differentialgleichung

$$\nabla^2 (\mathbf{r} \times \nabla)^2 \Psi_2 - \kappa^2 (\mathbf{r} \times \nabla)^2 \Psi_2 = -j\omega\mu \mathbf{p}' \cdot (\mathbf{r}' \times \nabla') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (3.4.33)$$

Es ist nun noch, ausgehend von Gl. 3.4.17, die Randbedingung für Ψ_2 herzuleiten. Hier ist zusätzlich zu berücksichtigen, daß die Vektorfunktion $\mathbf{K}$ und damit auch die Ansatzfunktion $[\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla)] \Psi_2$ zumindest für $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ der homogenen, vektoriellen Helmholtzgleichung genügen muß. Damit gilt

$$\nabla \times \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla) \Psi_2 = \kappa^2 (\mathbf{r} \times \nabla) \Psi_2 \quad \text{für } \mathbf{r} \neq \mathbf{r}' \quad .$$

Da zudem nach unseren Voraussetzungen $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$ nicht beide auf dem Kegelmantel liegen sollen, und damit $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ auf dem Rand immer gilt, ist die Randbedingung für $\nabla \times \mathbf{K}$ dann erfüllt, wenn die Tangentialkomponente von $(\mathbf{r} \times \nabla) \Psi_2$ auf dem Kegelmantel verschwindet. Durch Vergleich mit den Komponenten der M-Funktion in Tabelle 3.1.1 erhält man daraus für Ψ_2 die Randbedingung

$$\left. \frac{\partial \Psi_2(r, \vartheta, \varphi; r', \vartheta', \varphi')}{\partial \vartheta} \right|_{\vartheta=\vartheta_0} = 0 \quad (3.4.34)$$

Für Ψ_2 wird deshalb der Ansatz

$$\Psi_2 = \sum_i B_{q_i}(r, r'; \vartheta', \varphi') Y_{q_i}(\vartheta, \varphi) \quad , \quad (3.4.35)$$

gemacht. Mit diesem Ansatz erhält man durch Einsetzen in Gl. 3.4.33

$$\begin{aligned} -(\nabla^2 + \kappa^2) \sum_i q_i(q_i + 1) B_{q_i}(r, r'; \vartheta', \varphi') Y_{q_i}(\vartheta, \varphi) = \\ -j\omega\mu \frac{1}{r^2} \delta(r - r') \sum_i \mathbf{p}' \cdot (\mathbf{r}' \times \nabla') Y_{q_i}(\vartheta', \varphi') Y_{q_i}(\vartheta, \varphi) \quad , \end{aligned} \quad (3.4.36)$$

wobei auf der rechten Seite bereits die Vollständigkeitsrelation eingesetzt worden ist. Weiterhin macht man für $B_{q_i}(r, r'; \vartheta', \varphi')$ zweckmäßig den Ansatz

$$B_{q_i}(r, r'; \vartheta', \varphi') = \frac{j\omega\mu}{q_i(q_i + 1)} f_{q_i}(r, r') \mathbf{p}' \cdot (\mathbf{r}' \times \nabla') Y_{q_i}(\vartheta, \varphi) Y_{q_i}(\vartheta', \varphi') \quad (3.4.37)$$

und erhält durch Einsetzen in Gl. 3.4.36 und Ausnutzung der Orthogonalität der Y_{q_i} für $f_{q_i}(r, r')$ die Differentialgleichung

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{df_{q_i}(r, r')}{dr} \right) + [\kappa^2 r^2 - q_i(q_i + 1)] f_{q_i}(r, r') = \delta(r - r') \quad , \quad (3.4.38)$$

deren Lösung durch

$$f_{q_i}(r, r') = j_{q_i}(\kappa r_{<}) h_{q_i}^{(2)}(\kappa r_{>}) \quad (3.4.39)$$

gegeben ist.

Für Ψ_2 ergibt sich somit

$$\begin{aligned} \Psi_2(r, \vartheta, \varphi; r', \vartheta', \varphi') = \\ -\kappa \omega \mu \mathbf{p}' \cdot (\mathbf{r}' \times \nabla') \sum_i \frac{j_{q_i}(\kappa r_{<}) h_{q_i}^{(2)}(\kappa r_{>})}{q_i(q_i + 1)} Y_{q_i}(\vartheta, \varphi) Y_{q_i}(\vartheta', \varphi') \end{aligned} \quad (3.4.40)$$

Durch Einsetzen der Reihendarstellungen von Ψ_1 nach Gl. 3.4.29 und Ψ_2 nach Gl. 3.4.40 in den Ansatz 3.4.10 erhält man dann eine explizite Darstellung der Vektorfunktion $\mathbf{K}$. Da der Vektor $\mathbf{p}'$ konstant ist, kann er über alle Differentialoperatoren hinweg nach rechts herausgezogen werden, und man erhält schließlich

$$\begin{aligned} \mathbf{K}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = & -\kappa \omega \mu \{ (\mathbf{r} \times \nabla) [\nabla' \times (\mathbf{r}' \times \nabla')] T_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \} \cdot \mathbf{p}' - \\ & \kappa \omega \mu \{ [\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla)] (\mathbf{r}' \times \nabla') T_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \} \cdot \mathbf{p}' \end{aligned} \quad (3.4.41)$$

mit

$$T_D = \sum_i \frac{j_{p_i}(\kappa r_{<}) h_{p_i}^{(2)}(\kappa r_{>})}{p_i(p_i + 1)} Y_{p_i}(\vartheta, \varphi) Y_{p_i}(\vartheta', \varphi') \quad (3.4.42)$$

und

$$T_N = \sum_i \frac{j_{q_i}(\kappa r_{<}) h_{q_i}^{(2)}(\kappa r_{>})}{q_i(q_i + 1)} Y_{q_i}(\vartheta, \varphi) Y_{q_i}(\vartheta', \varphi') \quad . \quad (3.4.43)$$

Aus dieser Darstellung muß dann noch der Vektor $\mathbf{G}$ und damit die Greensche Dyade $\underline{\underline{\Gamma}}$ berechnet werden. Hierzu setzt man den Ansatz 3.4.10 zunächst in Gl. 3.4.6 ein und erhält

$$\mathbf{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \frac{j\omega\mu}{\kappa^2} \mathbf{p}' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') + \frac{1}{\kappa^2} \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla) \Psi_1 + \frac{1}{\kappa^2} \nabla \times \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla) \Psi_2 \quad (3.4.44)$$

Um daraus eine Darstellung über die Partikulärlösungen der vektoriellen Helmholtzgleichung zu gewinnen, formt man den letzten Term in dieser Gleichung noch um.

Es gilt

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla) \Psi_2 &= \nabla \nabla \cdot (\mathbf{r} \times \nabla) \Psi_2 - \nabla^2 (\mathbf{r} \times \nabla) \Psi_2 \\ &= -\nabla^2 (\mathbf{r} \times \nabla) \Psi_2 \\ &= -(\mathbf{r} \times \nabla) \nabla^2 \Psi_2 \quad ,\end{aligned}\tag{3.4.45}$$

da $\nabla \cdot (\mathbf{r} \times \nabla) \Psi_2 = -\nabla \cdot \nabla \times (\mathbf{r} \Psi_2) = 0$.

Nach Gl. 3.4.33 gilt zudem

$$\nabla^2 (\mathbf{r} \times \nabla)^2 \Psi_2 - \kappa^2 (\mathbf{r} \times \nabla)^2 \Psi_2 = -j\omega\mu \mathbf{p}' \cdot (\mathbf{r}' \times \nabla') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad .\tag{3.4.46}$$

Mit der Vertauschungsrelation $\nabla^2 (\mathbf{r} \times \nabla)^2 = (\mathbf{r} \times \nabla)^2 \nabla^2$ (Gl. A1.1 k)) erhält man daraus

$$(\mathbf{r} \times \nabla)^2 [\nabla^2 \Psi_2 + \kappa^2 \Psi_2] = -j\omega\mu \mathbf{p}' \cdot (\mathbf{r}' \times \nabla') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad .\tag{3.4.47}$$

Definiert man nun eine Funktion $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ derart, daß

$$\nabla^2 \Psi_2 + \kappa^2 \Psi_2 = \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\tag{3.4.48}$$

gilt, dann kann man aus Gl. 3.4.47 schließen, daß ρ der Differentialgleichung

$$(\mathbf{r} \times \nabla)^2 \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -j\omega\mu \mathbf{p}' \cdot (\mathbf{r}' \times \nabla') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')\tag{3.4.49}$$

genügen muß. Zudem kann man anhand der Reihenentwicklung von Ψ_2 ablesen, daß Ψ_2 in allen Aufpunkten $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ der homogenen, skalaren Helmholtzgleichung genügt, so daß die Funktion $\rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ für $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ identisch Null ist. Da wir bei den betrachteten Randwertproblemen immer den Fall $\mathbf{r} = \mathbf{r}'$ ausschließen können, muß die Funktion ρ hier nicht explizit bestimmt werden. Wir lassen sie aber in der weiteren Rechnung formal stehen, um anzuzeigen, daß diese singuläre Funktion bei der vollständigen Angabe der Greenschen Dyade ebenfalls berücksichtigt werden muß.⁶

⁶Eine Reihendarstellung dieser Funktion könnte mit Hilfe der Vollständigkeitsrelation direkt angegeben werden, was wir hier aber aus den genannten Gründen nicht explizit durchführen. Eine andere Methode zur Bestimmung dieses singulären Terms ist in [54] erwähnt und in [47] hergeleitet. Diese Methode kann hier allerdings nicht direkt angewendet werden, da dort der Fall, daß Auf- und Quellpunkt auf dem Rand des Lösungsgebietes liegen nicht berücksichtigt ist.

Mit Gl. 3.4.45 und 3.4.48 findet man also

$$\begin{aligned}\nabla \times \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla) \Psi_2 &= -(\mathbf{r} \times \nabla) \nabla^2 \Psi_2 \\ &= \kappa^2 (\mathbf{r} \times \nabla) \Psi_2(\mathbf{r}, \mathbf{r}') - (\mathbf{r} \times \nabla) \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \quad ,\end{aligned}$$

so daß man für die Vektorfunktion $\mathbf{G}$ schließlich angeben kann

$$\begin{aligned}\mathbf{G} &= \frac{j\omega\mu}{\kappa^2} \mathbf{p}' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{1}{\kappa^2} (\mathbf{r} \times \nabla) \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + \frac{1}{\kappa^2} [\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla)] \Psi_1 + (\mathbf{r} \times \nabla) \Psi_2 \\ &= \frac{j\omega\mu}{\kappa^2} \mathbf{p}' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') - \frac{1}{\kappa^2} (\mathbf{r} \times \nabla) \rho(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \\ &\quad - \frac{1}{\kappa} \omega\mu [\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla)] \{[\nabla' \times (\mathbf{r}' \times \nabla')] T_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\} \cdot \mathbf{p}' \\ &\quad - \kappa\omega\mu (\mathbf{r} \times \nabla) \{(\mathbf{r}' \times \nabla') T_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}')\} \cdot \mathbf{p}' \quad (3.4.50)\end{aligned}$$

mit

$$T_D = \sum_i \frac{j_{p_i}(\kappa r_<) h_{p_i}^{(2)}(\kappa r_>)}{p_i(p_i + 1)} Y_{p_i}(\vartheta, \varphi) Y_{p_i}(\vartheta', \varphi') \quad (3.4.51)$$

und

$$T_N = \sum_i \frac{j_{q_i}(\kappa r_<) h_{q_i}^{(2)}(\kappa r_>)}{q_i(q_i + 1)} Y_{q_i}(\vartheta, \varphi) Y_{q_i}(\vartheta', \varphi') \quad (3.4.52)$$

Für $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}'$ erhält man daraus für die Greensche Dyade $\underline{\Gamma}(\mathbf{r}, \mathbf{r}')$ die Darstellung

$$\begin{aligned}\underline{\Gamma} &= \\ &= -\kappa\omega\mu \left\{ \frac{1}{\kappa^2} [\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla)] [\nabla' \times (\mathbf{r}' \times \nabla')] T_D(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + (\mathbf{r} \times \nabla) (\mathbf{r}' \times \nabla') T_N(\mathbf{r}, \mathbf{r}') \right\} \quad (3.4.53)\end{aligned}$$

Diese Darstellung ist bereits in Kap. 3.3 Gl. (3.3.12) angegeben worden.

Wir wollen nun noch aus dieser Darstellung die Entwicklung nach den $\mathbf{M}$ - und $\mathbf{N}$ -Funktionen herleiten. Dazu ist zwischen den Fällen $|\mathbf{r}| < |\mathbf{r}'|$ und $|\mathbf{r}| > |\mathbf{r}'|$ zu unterscheiden.

Betrachten wir zunächst den Fall $|\mathbf{r}| > |\mathbf{r}'|$. Dann sind in den Funktionen T_D und T_N die Ersetzungen $r_< = r'$ und $r_> = r$ vorzunehmen. Setzt man diese Funktionen dann in der Darstellung der Greenschen Dyade ein und vertauscht

Differentiation und Summation, so erhält man für den ersten Term in der Greenschen Dyade

$$\frac{1}{\kappa} [\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla)] [\nabla' \times (\mathbf{r}' \times \nabla')] T_D =$$

$$\sum_i \frac{1}{\kappa} [\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla)] \frac{1}{\kappa} [\nabla' \times (\mathbf{r}' \times \nabla')] \frac{j_{p_i}(\kappa r') h_{p_i}^{(2)}(\kappa r)}{p_i(p_i + 1)} Y_{p_i}(\vartheta, \varphi) Y_{p_i}(\vartheta', \varphi') .$$

Der Operator $[\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla)]$ wirkt dabei nur auf die ungestrichenen und der Operator $[\nabla' \times (\mathbf{r}' \times \nabla')]$ nur auf die gestrichenen Größen, weshalb man in diesem Ausdruck die Funktionen die von den ungestrichenen Koordinaten abhängen über den Operator $[\nabla' \times (\mathbf{r}' \times \nabla')]$ hinwegziehen kann. Setzt man dann gemäß den Definitionen in Kap. 3.1

$$\frac{1}{\kappa} [\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla)] j_{p_i}(\kappa r) Y_{p_i}(\vartheta, \varphi) =: \mathbf{N}_{p_i}^{(1)}(\mathbf{r})$$

und

$$\frac{1}{\kappa} [\nabla' \times (\mathbf{r}' \times \nabla')] h_{p_i}^{(2)}(\kappa r') Y_{p_i}(\vartheta', \varphi') =: \mathbf{N}_{p_i}^{(2)}(\mathbf{r}') ,$$

so erhält man für den ersten Term die gesuchte Darstellung. Dabei haben wir hier die Konvention eingeführt, daß der ober Index (1) bei den N-Funktionen bedeutet, daß die sphärischen Besselfunktionen einzusetzen sind, während bei dem oberen Index (2) die sphärischen Hankelfunktionen 2. Art verwendet werden müssen. Eine analoge Konvention wird auch bei den M-Funktionen verwendet.

Verfährt man auf die gleiche Art mit dem zweiten Term in Gl. 3.4.53, so erhält man schließlich die Darstellung

$$\underline{\mathbf{L}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\kappa\omega\mu \left\{ \sum_i \frac{\mathbf{M}_{q_i}^{(2)}(\mathbf{r}) \mathbf{M}_{q_i}^{(1)}(\mathbf{r}')}{q_i(q_i + 1)} + \sum_i \frac{\mathbf{N}_{p_i}^{(2)}(\mathbf{r}) \mathbf{N}_{p_i}^{(1)}(\mathbf{r}')}{p_i(p_i + 1)} \right\} , \quad |\mathbf{r}| > |\mathbf{r}'|$$

(3.4.54)

Für $|\mathbf{r}| < |\mathbf{r}'|$ ist die Bedeutung der Variablen $r_<$ und $r_>$ in T_D und T_N zu vertauschen und man erhält auf die oben beschriebene Art und Weise

$$\underline{\mathbf{L}}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = -\kappa\omega\mu \left\{ \sum_i \frac{\mathbf{M}_{q_i}^{(1)}(\mathbf{r}) \mathbf{M}_{q_i}^{(2)}(\mathbf{r}')}{q_i(q_i + 1)} + \sum_i \frac{\mathbf{N}_{p_i}^{(1)}(\mathbf{r}) \mathbf{N}_{p_i}^{(2)}(\mathbf{r}')}{p_i(p_i + 1)} \right\} , \quad |\mathbf{r}| < |\mathbf{r}'|$$

(3.4.55)

Mit diesem Ergebnis und den in Kap. 3.3 vorgestellten Integraldarstellungen der elektrischen Feldstärke hat man nun eine allgemeine Theorie zur Lösung der Maxwellschen Gleichungen in elliptischen Kegelkoordinaten vorliegen, mit deren Hilfe wir in den folgenden Kapiteln verschiedene Randwertprobleme mit elliptischer Kegelgeometrie behandeln werden.

4 Anwendungen der Lösung der Maxwell'schen Gleichungen bei Randwertproblemen mit elliptischer Kegelgeometrie

In Kap. 3 haben wir uns mit der allgemeinen Theorie zur Lösung von Randwertproblemen in elliptischen Kegelkoordinaten befaßt. Wie wollen nun verschiedene Anwendungen dieser Theorie vorstellen. Dabei werden wir uns zunächst mit dem asymptotischen Verhalten des elektromagnetischen Feldes in der Umgebung der Kegelspitze befassen. Es zeigt sich, daß die dort auftretenden Feldsingularitäten weitgehend unabhängig von der speziellen Art der Feldanregung sind, und nur durch wenige Terme der Multipolentwicklung des Feldes bestimmt werden.

In den darauffolgenden Abschnitten befassen wir uns mit Beugungs- bzw. Abstrahlungsproblemen, bei denen eine Quellen- oder Randwertverteilung vorgegeben ist. In diesem Zusammenhang werden wir u.a. verschiedene Methoden darstellen, mit denen die Multipolamplituden einer Feldverteilung bestimmt werden können.

4.1 Feldsingularitäten an der Spitze des elliptischen Kegels

Aus der Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen an Objekten mit scharfen Kanten ist bekannt ([42]), daß eine eindeutige und vollständige Lösung des Randwertproblems neben den Randbedingungen und der Ausstrahlungsbedingung auch die Energiebedingung erfüllen muß. Diese sagt aus, daß die Feldenergie in jedem endlichen Volumenbereich des Lösungsgebietes endlich bleiben muß. Insbesondere muß dies auch in der Umgebung geometrischer Singularitäten, wie Spitzen oder Kanten, eines Streukörpers gelten, an denen bekanntlich Singularitäten des elektromagnetischen Feldes auftreten können. Es sind dann nur solche Lösungen physikalisch sinnvoll, bei denen die Feldstärken nur schwach singulär, d.h. quadratintegrabel sind.

Bei den hier untersuchten Randwertproblemen ist eine geometrische Singularität durch die Spitze des elliptischen Kegels bei $r=0$ gegeben. Das asymptotische Verhalten des Feldes in der Umgebung dieser Spitze kann direkt aus

den in Kap. 3 abgeleiteten Partikulärlösungen der vektoriellen Helmholtzgleichung abgeleitet werden. Erste Untersuchungen hierzu gehen auf Blume und Kirchner ([19],[35],[36],[4]) zurück, die das asymptotische Verhalten akustischer Wellen an der Spitze eines schallweichen bzw. schallharten elliptischen Kegels berechnet haben. Die dort gefundenen Ergebnisse können auf den Fall elektromagnetischer Felder übertragen werden, da diese ebenfalls aus der Lösung der skalaren Helmholtzgleichung abgeleitet werden können. Die in diesen Arbeiten vorgestellten Ergebnisse erfassen die Feldsingularität allerdings nicht vollständig, da die Singularität eines bestimmten Symmetrietyps dort nicht berücksichtigt wird. Das gleiche gilt für eine jüngere Untersuchung von Vafiadis und Sahalos ([63],[62]), bei der das Fehlen dieses Symmetrietyps auf das benutzte Verfahren zur Bestimmung der Eigenwerte zurückzuführen ist ([14]).

Wie bereits angeführt, kann das asymptotische Verhalten der Feldgrößen für $r \rightarrow 0$ aus den in Kap. 3 (Gl. 3.1.14 bis 3.1.18) vorgestellten Partikulärlösungen hergeleitet werden. Für die sphärischen Zylinderfunktionen ist dort die sphärische Besselfunktion einzusetzen, da nur diese in der Umgebung der Kegelspitze eine ausreichend schwache Feldsingularität liefert. Für $r \rightarrow 0$ ist das asymptotische Verhalten der sphärischen Besselfunktionen im wesentlichen durch

$$j_\nu(\kappa r) \sim (\kappa r)^\nu$$

gegeben, so daß man für die Komponenten der einzelnen Partialwellen die in Tab. 4.1.1 aufgeführten Darstellungen erhält.

Aus dieser expliziten Darstellung der Feldkomponenten kann man ablesen, daß ein E-Mode genau dann ein singuläres, aber quadratintegrables Feld liefert, wenn der zugehörige Eigenwert p_i (Dirichlet-Bedingung) die Ungleichung

$$0 < p_i < 1 \quad (4.1.1)$$

erfüllt. Für $p_i \geq 1$ liegt keine Singularität des Feldes vor, und für $p_i \leq 0$ wird das Feld so stark singulär, daß das Volumenintegral über die Energiedichte, erstreckt über ein beliebiges endliches Volumen um die Kegelspitze, nicht mehr existiert und damit die Energiebedingung nicht erfüllt ist.

Zu jedem elliptischen Kegel findet man genau einen Eigenwert p_i , der der Ungleichung 4.1.1 genügt. Er gehört zu dem Funktionstyp I (s. Tab. 3.2.1 und Anhang 2). Die Abhängigkeit dieses Eigenwertes von den Kegelöffnungswinkeln ist in Abb. 4.1.1 dargestellt. Im Fall des Kreiskegels und des Keils

E-Moden	H-Moden
$E_r = E_0 \frac{P_i}{(\kappa r)^{1-P_i}} Y_{P_i}(\vartheta, \varphi)$	$E_r = 0$
$E_\vartheta = E_0 \frac{1}{(\kappa r)^{1-P_i}} \frac{1}{s_\vartheta} \frac{\partial Y_{P_i}}{\partial \vartheta}$	$E_\vartheta = -E_0 (\kappa r)^{q_i} \frac{1}{s_\varphi} \frac{\partial Y_{q_i}}{\partial \varphi}$
$E_\varphi = E_0 \frac{1}{(\kappa r)^{1-P_i}} \frac{1}{s_\varphi} \frac{\partial Y_{P_i}}{\partial \varphi}$	$E_\varphi = E_0 (\kappa r)^{q_i} \frac{1}{s_\vartheta} \frac{\partial Y_{q_i}}{\partial \vartheta}$
$H_r = 0$	$H_r = H_0 \frac{q_i}{(\kappa r)^{1-q_i}} Y_{q_i}(\vartheta, \varphi)$
$H_\vartheta = H_0 (\kappa r)^{P_i} \frac{1}{s_\varphi} \frac{\partial Y_{P_i}}{\partial \varphi}$	$H_\vartheta = H_0 \frac{1}{(\kappa r)^{1-q_i}} \frac{1}{s_\vartheta} \frac{\partial Y_{q_i}}{\partial \vartheta}$
$H_\varphi = -H_0 (\kappa r)^{P_i} \frac{1}{s_\vartheta} \frac{\partial Y_{P_i}}{\partial \vartheta}$	$H_\varphi = H_0 \frac{1}{(\kappa r)^{1-q_i}} \frac{1}{s_\varphi} \frac{\partial Y_{q_i}}{\partial \varphi}$

Tabelle 4.1.1: *Das asymptotische Verhalten der Partikulärlösungen der vektoriellen Helmholtzgleichung. Die Amplituden sind hier mit E_0 und H_0 abgekürzt, da hier nur das prinzipielle Verhalten der Funktionen von Interesse ist.*

ergibt sich hier der erwartete Verlauf ([65],[5]). Für die dünne Spitze ($\alpha_{\min} = 0, \alpha_{\max} = 0$) wird $p_i = 0$, weshalb die hier vorgestellte Lösungstheorie nicht mehr anwendbar ist.

Aus Tab. 4.1.1 kann man zusätzlich ablesen, daß in dem Fall der E-Moden nur die Komponenten der elektrischen Feldstärke singulär werden. Die Komponenten der magnetischen Feldstärke verschwinden dagegen für $r \rightarrow 0$. Die Feldstruktur des singulären E-Moden kann anhand von Abb. 4.1.1 abgelesen werden, die die elektrischen Feldlinien dieses Moden für einen Kegel mit den Öffnungswinkeln $\alpha_{\min} = 30^\circ$ und $\alpha_{\max} = 60^\circ$ zeigt.

Bei den H-Moden findet man zu jedem Kegel genau zwei Eigenwerte q_i (v. Neumann-Bedingung), die die Ungleichung

$$0 < q_i < 1 \quad (4.1.2)$$

erfüllen (Abb. 4.1.3 und 4.1.4), und somit zu einer Singularität des Feldes führen. Die zugehörigen Eigenfunktionen sind vom Typ *II* bzw. *IV* (s. Tab. 3.2.1 und Anhang 2).

Im Fall des Kreiskegels sind die beiden Eigenwerte gleich. Die Aufhebung dieser Entartung in dem Fall $\alpha_{\min} \neq \alpha_{\max}$ läßt sich durch die Aufhebung der Rotationssymmetrie des Randwertproblems erklären. Bei den E-Moden tritt diese Aufhebung nicht in Erscheinung, da der zweite Eigenwert, der zu einer Feldsingularität führen würde, aus Symmetriegründen zu einer Eigenfunktion vom Typ *III* gehören müßte, und dieser Funktionstyp auf der Eigenwertkurve der Ordnung $\mu = 0$ (s. Anhang 2) nur die identisch verschwindende Lösung liefert.

Die Feldlinien der, im Fall der H-Moden singulären, magnetischen Feldstärke sind für beide Funktionstypen in Abb. 4.1.5 aufgetragen. Dort sind die Feldlinien für jeden Funktionstyp jeweils nur in einer Symmetrieebene des Kegels aufgezeichnet. In den dort nicht aufgeführten Symmetrieebenen stehen die entsprechenden Feldlinien senkrecht auf der Ebene, so daß in diesen Ebenen keine Feldlinie zu dem jeweiligen Funktionstyp verläuft. Die hier gefundenen Ergebnisse werden durch die auf völlig anderem Weg ermittelten Daten von van Bladel und Desmedt ([66]) bestätigt.

Die drei Typen von Feldsingularitäten an der Spitze des Kegels treten bei konkreten Randwertproblemen im allgemeinen gemischt auf. Die Gewichte, mit denen sie zu dem gesamten asymptotischen Verhalten des Feldes beitragen, sind gleich den Amplituden der zu den vorgestellten Eigenwerten

gehörigen Multipole. Bei der Lösung der in den folgenden Abschnitten behandelten Randwertaufgaben wird deutlich, wie diese Amplituden mit Hilfe der Greenschen Dyade des elliptischen Kegels bestimmt werden können.

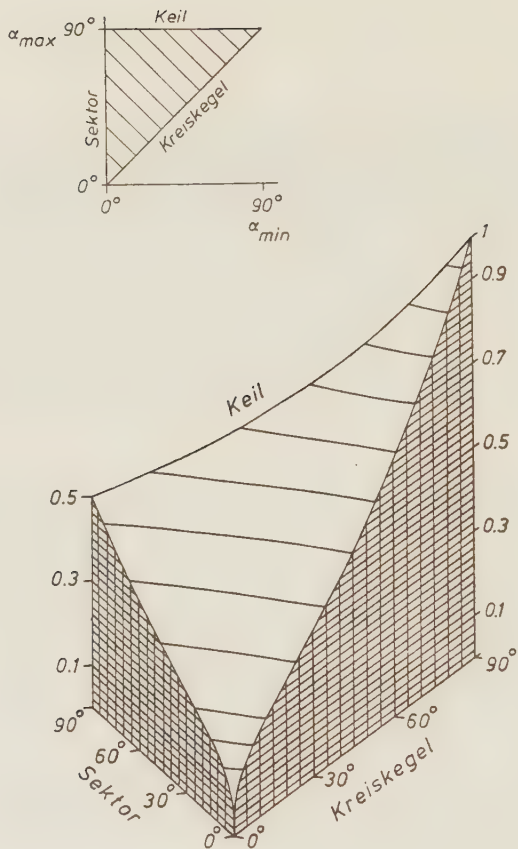
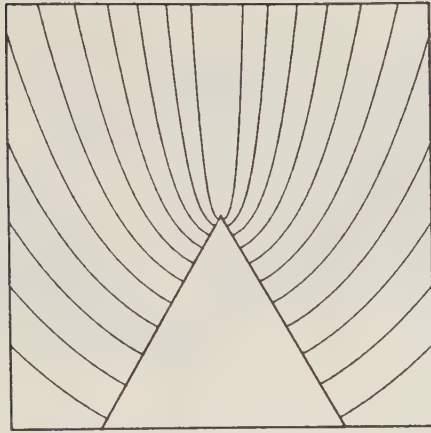
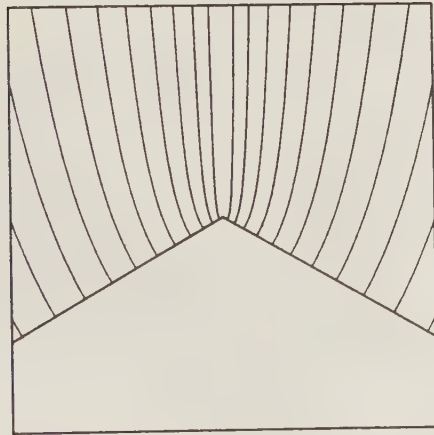


Abbildung 4.1.1: Eigenwert p_i des singulären E-Modes
in Abhängigkeit von den Kegelöffnungswinkeln
(Funktionstyp I)



Ebene $y=0$



Ebene $x=0$

Abbildung 4.1.2: *Elektrische Feldlinien des singulären E-Modes in den Symmetrieebenen des Kegels.*
 $\alpha_{\min} = 30^\circ$, $\alpha_{\max} = 60^\circ$

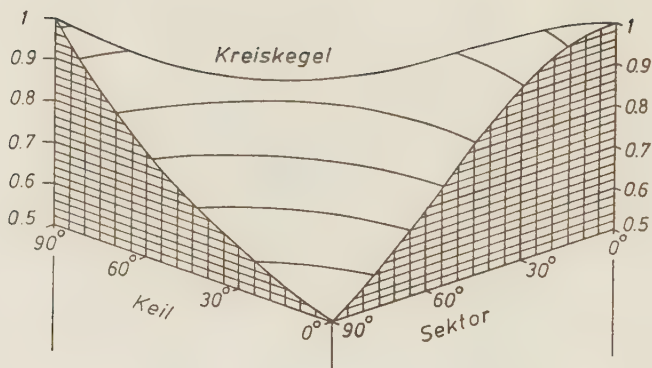


Abbildung 4.1.3: Eigenwert q_i des singulären H-Modes in Abhängigkeit von den Kegelöffnungswinkeln (Funktionstyp II)

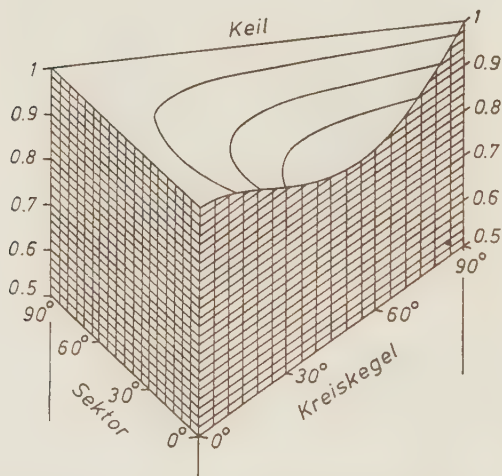
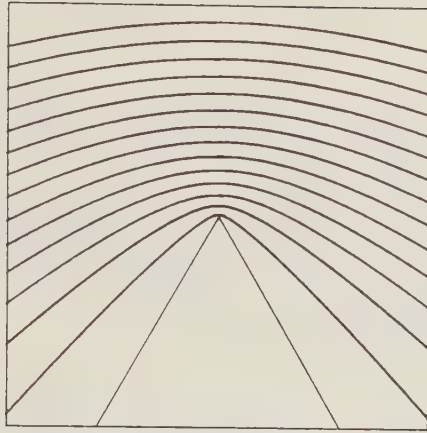
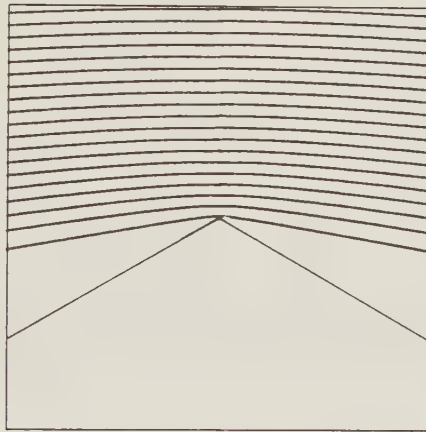


Abbildung 4.1.4: Eigenwert q_i des singulären H-Modes in Abhängigkeit von den Kegelöffnungswinkeln (Funktionstyp IV)



Ebene $y=0$, Funktionstyp II



Ebene $x=0$, Funktionstyp IV

Abbildung 4.1.5: *Magnetische Feldlinien des singulären H-Modes in den Symmetrieebenen des Kegels.*
 $\alpha_{\min} = 30^\circ$, $\alpha_{\max} = 60^\circ$

4.2 Das Feld eines Hertzschen Dipols vor einem elliptischen Kegel

Wir haben in dem Kapitel über die Geometrie der elliptischen Kegelkoordinaten (Kap. 2.1) zwei wichtige Beispiele für Randwertprobleme mit elliptischer Kegelgeometrie angeführt. Bei dem ersten Beispiel ist als Quelle des Feldes eine Stromdichteverteilung $\mathbf{J}$ vor einem ideal leitenden elliptischen Kegel vorgegeben (Abb. 4.2.1).

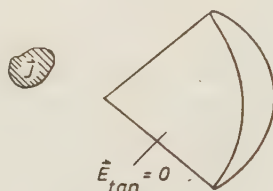


Abbildung 4.2.1: Stromdichteverteilung vor einem elliptischen Kegel

Zur Berechnung des elektromagnetischen Gesamtfeldes dieser Anordnung wird man zweckmäßig auf die Felddarstellung nach Gl. 3.3.8 zurückgreifen. In dieser Darstellung liefert unter den gegebenen Verhältnissen nur das Volumenintegral einen Feldbeitrag. Die Beiträge der Integration über den Kegelmantel verschwinden, da dort die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke identisch Null sind. Die Fernkugel liefert ebenfalls keinen Feldbeitrag, da das Gesamtfeld der Anordnung dort der Ausstrahlungsbedingung genügen muß, solange sich die Stromdichte $\mathbf{J}$ in einem endlichen Abstand von der Kegelspitze befindet.

Man erhält somit die Felddarstellung

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \iiint_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{\Gamma}_e(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) dv' \quad . \quad (4.2.1)$$

Wir wollen hier zunächst das Feld eines Hertzschen Dipols untersuchen. Die

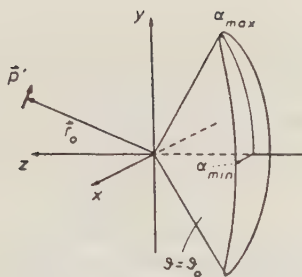


Abbildung 4.2.2: *Orientierung und Lage des Dipols vor einem elliptischen Kegel*

Stromdichteverteilung dieses Dipol ist durch ⁷

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') = \mathbf{p}' \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{r}_0) \quad (4.2.2)$$

gegeben. Der Vektor $\mathbf{p}'$ gibt hier sowohl den Betrag des Dipolmomentes als auch die Orientierung des Dipols an. Der Vektor $\mathbf{r}_0$ in dem Argument der δ -Funktion legt dagegen die Lage des Dipols fest (Abb. 4.2.2).

Mit Hilfe der Filtereigenschaft der δ -Funktion kann bei der so vorgegebenen Stromdichte die Integration in Gl. 4.2.1 direkt ausgeführt werden. Als Ergebnis erhält man das Feld

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{p}' \cdot \mathbf{\Gamma}_e(\mathbf{r}_0; \mathbf{r}) \quad (4.2.3)$$

Beschränken wir uns auf die Untersuchung des Fernfeldes dieser Anordnung, dann ist $|\mathbf{r}|$ immer größer als $|\mathbf{r}_0|$, so daß man für die Greensche Dyade die Darstellung nach Gl. 3.3.23 einsetzen kann. Für das Feld des Dipols findet man so

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\kappa\omega\mu \left\{ \sum_i a_{q_i} \mathbf{M}_{q_i}^{(2)}(\mathbf{r}) - \sum_i b_{p_i} \mathbf{N}_{p_i}^{(2)}(\mathbf{r}) \right\}, \quad |\mathbf{r}| > |\mathbf{r}_0| \quad (4.2.4)$$

⁷Diese Stromverteilung ist natürlich technisch nicht realisierbar. Sie ist aber zum einen als Näherung für räumlich auf einen sehr kleinen Bereich beschränkte Verteilungen zu verstehen, zum anderen kann jede beliebige Verteilung durch Superposition solcher Dipole dargestellt werden.

mit

$$a_{q_i} = \frac{\mathbf{p}' \cdot \mathbf{M}_{q_i}^{(1)}(\mathbf{r}_0)}{q_i(q_i + 1)}$$

und

$$b_{p_i} = \frac{\mathbf{p}' \cdot \mathbf{N}_{p_i}^{(1)}(\mathbf{r}_0)}{p_i(p_i + 1)}$$

Erste numerische Auswertungen der Felddarstellung nach Gl. 4.2.4 sind von Satterwhite ([52],[53]) für den Spezialfall des Sektors durchgeführt worden. Ergebnisse für den elliptischen Kegel werden in den Arbeiten von Vafiadis und Sahalos ([50],[60],[63],[61]) vorgestellt, die allerdings auf zum Teil falschen Rechnungen beruhen, in denen die zweite Summe in Gl. 4.2.4 nicht berücksichtigt wurde. Korrekturen und Ergänzungen zu diesen Arbeiten sind in [37] und z.T. in [18] zu finden. Für den skalaren Fall findet man zudem Ergebnisse in den Arbeiten von Blume und Kirchner ([19],[35],[36]) sowie in [59].

In allen zitierten Arbeiten wird ausschließlich der Fall sehr kleinen elektrischen Abstandes⁸ des Dipols von der Kegelspitze behandelt. In diesem Fall sind nur wenige führende Terme in der Reihenentwicklung des Feldes zu berücksichtigen. Bei größeren Abständen nimmt die Anzahl der signifikanten Terme zu. Um einen Überblick über den numerischen Aufwand bei größeren Dipolabständen zu erhalten, betrachten wir zunächst den Fall, daß der Dipol auf der z-Achse liegt, und in z-Richtung orientiert ist. Da dies die Anordnung mit der höchsten Symmetrie in der Feldanregung ist, kann erwartet werden, daß in diesem Fall der notwendige Rechenaufwand minimal wird.

Die Richtung des Dipols ist bei dieser Anordnung gleich $\mathbf{e}_{r_0}$, und seine Lage wird durch die Koordinaten $\vartheta' = 0$ und $\varphi' = 0$ angegeben. Der Betrag des Dipolmomentes sei Il . Es gilt dann nach Gl. 3.1.14-3.1.18

$$\mathbf{p}' \cdot \mathbf{M}_{q_i}^{(1)}(\mathbf{r}_0) = 0 \quad (4.2.5)$$

und

$$\mathbf{p}' \cdot \mathbf{N}_{p_i}^{(1)}(\mathbf{r}_0) = -Il \frac{j_{p_i}(\kappa r_0)}{\kappa r_0} Y_{p_i}(0,0) p_i(p_i + 1) \quad (4.2.6)$$

Anhand der Reihendarstellung der Laméschen Funktionen (Anhang A2) ist abzulesen, daß $Y_{p_i}(0,0)$ nur für den Funktionstyp I von Null verschieden ist,

⁸Unter dem elektrischen Abstand verstehen wir hier das Verhältnis aus Dipolabstand r_0 zur Freiraumwellenlänge λ_0 der erzeugten elektromagnetischen Welle.

so daß in der Felddarstellung nur über diesen Funktionstyp summiert werden muß.

Da wir uns hier nur für das Fernfeld der Anordnung interessieren, kann in dem Ausdruck für $N_{p_i}^{(2)}$ statt der sphärischen Hankelfunktion deren asymptotische Näherung für $r \rightarrow \infty$

$$h_\nu^{(2)}(\kappa r) \approx j^{\nu+1} \frac{e^{-j\kappa r}}{\kappa r} \quad (4.2.7)$$

und

$$\frac{1}{\kappa r} \frac{d}{dr} [r h_\nu^{(2)}(\kappa r)] \approx j^\nu \frac{e^{-j\kappa r}}{\kappa r} \quad (4.2.8)$$

eingesetzt werden ([37], [1]). Man erhält dann die Fernfelddarstellung

$$\mathbf{E}_f(\mathbf{r}) = -\frac{\omega \mu I l}{r_0} \frac{e^{-j\kappa r}}{\kappa r} \sum_i^{(I)} j^{p_i} j_{p_i}(\kappa r_0) Y_{p_i}(0,0) \mathbf{n}_{p_i}(\vartheta, \varphi) \quad (4.2.9)$$

Die Kennzeichnung über dem Summationszeichen deutet dabei an, daß nur über den Funktionstyp I zu summieren ist.

Bei kleinen Werten von κr_0 geht $j_\nu(\kappa r_0)$, als Funktion der Ordnung ν , bei wachsendem ν sehr schnell gegen Null, so daß in der Reihenentwicklung des Feldes nur Terme mit kleinen Eigenwerten p_i zu berücksichtigen sind. Bei wachsendem Argument κr_0 setzt dieses Verhalten der Besselfunktionen erst bei größeren Werten von ν ein, weshalb bei größer werdendem Dipolabstand immer mehr Terme in der Feldentwicklung signifikante Beiträge liefern.

Man ordnet deshalb die Eigenwerte p_i zweckmäßig nach ihrer Größe und summiert dann über so viele Eigenwerte, daß sich das Ergebnis bei Hinzunahme weiterer Terme nicht mehr wesentlich ändert. Bei den numerischen Auswertungen haben sich die in Tab. 4.2.1 angegebenen Werte für die Anzahl der mitgeführten Summenterme als sinnvoll erwiesen. Wir haben diese Werte hier deshalb aufgelistet, weil sich herausgestellt hat, daß sie auch bei anderen Randwertproblemen des i.f. behandelten Typs einen guten Anhaltspunkt für die Wahl der zu berücksichtigen Summenterme liefern. Dabei muß allerdings über jeden auftretenden Funktionstyp gesondert summiert werden, so daß der numerische Aufwand entsprechend anwächst. Statt des Dipolabstandes ist bei anderen Randwertproblemen der charakteristische Abstand der Feldanregung von der Kegelspitze einzusetzen.

Die Verläufe der Fernfeldkomponenten in den Symmetrieebenen des Kegels, die sich für die untersuchte Dipolanordnung ergeben, sind in Abb. 4.2.3 bis

$\frac{r_0}{\lambda_0}$	Anz. der Summenterme
0.01	5
0.1	10
0.5	15
1.0	20

Tabelle 4.2.1:

*Anzahl der signifikanten Summenterme in der
Reihenentwicklung des Fernfeldes
(Dipol auf der z -Achse, in z -Richtung orientiert)*

4.2.5 für verschiedene Kegelöffnungswinkel und verschiedene Werte von κr_0 dargestellt. Die Normierung der Feldamplituden ist dabei aus darstellungstechnischen Gründen so gewählt worden, daß die Komponente $E_{\vec{y}}$ in der (y, z) -Ebene den maximalen Wert 1 annimmt. Der Anschaulichkeit halber sind in den Abbildungen die Kugelkomponenten $E_{\vec{\theta}}$ und $E_{\vec{\varphi}}$ aufgetragen, die in der (x, y) - und der (x, z) -Ebene mit den Komponenten in elliptischen Kegelkoordinaten übereinstimmen. In der (y, z) -Ebene müßte allerdings bei der Angabe in elliptischen Kegelkoordinaten zwischen den Komponenten auf dem Sektor $\vartheta = 0$ und den Komponenten auf dem Rest der Ebene unterschieden werden (vgl. Kap. 2.1). Die in den Abbildungen nicht aufgeführten Komponenten sind in den betreffenden Ebenen identisch Null.

Anhand des Verlaufes der Komponenten in der (x, z) - und der (y, z) -Ebene erkennt man besonders gut, daß die Feldenergie bei sehr kleinen Dipolabständen zu einem wesentlichen Teil längs der Oberfläche des Kegels geleitet wird, obwohl der Dipol im freien Raum die größte Energiedichte senkrecht zu der Kegelachse abstrahlen würde. Für Werte von $r_0/\lambda_0 < 0.1$ bleibt dieser prinzipielle Verlauf der Feldkomponenten erhalten. Bei größeren Abständen strahlt der Dipol immer stärker senkrecht zu der Kegelachse ab. Der unregelmäßige Verlauf der Feldamplitude in den beiden Symmetrieebenen für $r_0/\lambda_0 = 1$ ist auf Interferenzen zwischen der Dipolwelle und der Beugungswelle des Kegels zurückzuführen.

Anhand der $E_{\vec{y}}$ -Komponente in der zu der Kegelachse transversalen (x, y) -

Ebene ist besonders deutlich die Abweichung von der Rotationssymmetrie der Anordnung abzulesen. Bei $\alpha_{\min} \approx \alpha_{\max}$ ist der Verlauf dieser Feldkomponente nahezu rotationssymmetrisch. Bei $\alpha_{\max} = 80^\circ$ strahlt die Anordnung dagegen für kleine Dipolabstände im wesentlichen in die y -Richtung. Hier deutet sich der Grenzübergang zu dem Fall des Keils ($\alpha_{\max} = 90^\circ$) an, bei dem die Feldenergie bei kleinen Dipolabständen im wesentlichen längs der Keilkante geleitet wird. Für größere Dipolabstände wird dagegen das Feld im wesentlichen durch Interferenzeffekte zwischen der Dipolwelle und der Beugungswelle bestimmt.

Neben dem symmetrischen Fall des Dipols auf der z -Achse⁹ wurde auch ein unsymmetrischer Anregungsfall untersucht. In den Abbildungen 4.2.6 bis 4.2.9 sind die Verläufe der Feldkomponenten für den Fall eines Dipol auf der negativen x -Achse aufgetragen, der in z -Richtung orientiert ist. In diesem Anregungsfall sind alle vier Symmetrietypen der Lösungsfunktionen zu berücksichtigen.

Man erkennt anhand der Abbildungen, daß das Feld für sehr kleine Abstände des Dipols von der Kegelspitze im wesentlichen mit dem Feld des Dipols auf der z -Achse übereinstimmt. Für größere Dipolabstände tritt die erwartete Unsymmetrie des Feldes auf, und in der (y, z) -Ebene erhält man eine zusätzliche $E_{\bar{y}}$ -Komponente. Bei Dipolabständen $r_0/\lambda_0 \geq 0.5$ kann zudem anhand der Feldkomponenten in der (x, y) - und in der (x, z) -Ebene ein Abschattungseffekt durch den Kegel festgestellt werden.

In den Abbildungen 4.2.10 bis 4.2.12 sind die Feldkomponenten für denselben Anregungsfall aufgetragen, allerdings nicht für einen elliptischen Kegel sondern für metallische Sektoren mit den Halböffnungswinkeln 80° , 50° und 20° . Man erkennt, daß in diesem Fall der Leitungseffekt bei kleinen Dipolabständen aufgrund der Singularität des Feldes an den Sektorkanten stärker ausgeprägt ist. Ebenfalls auf die Kantensingularität zurückzuführen sind die Interferenzerscheinungen, die dort bei größeren Dipolabständen auftreten. Sie sind durch Wechselwirkungen zwischen der Dipolwelle und den Kantenbeugungswellen des Sektors zu erklären. Größere Dipolabstände als $r_0/\lambda = 0.5$ sind hier nicht behandelt worden, da im Fall des Sektors der numerische Aufwand zur Berechnung ausreichend vieler Eigenwerte zu umfangreich wird.

Neben der einfachen Stromdichteverteilung des Hertzschen Dipols können auch andere Quellverteilungen mit der Methode der dyadischen Greenschen

⁹Ergebnisse für eine Orientierung des Dipols senkrecht zu der Kegelachse sind in [18] und in [37] vorgestellt

Funktion behandelt werden. Auch bei dem Problem eines Ringstromes vor dem elliptischen Kegel, das wir in dem folgenden Abschnitt behandeln werden, erweist sich diese Methode als besonders effizient, da mit ihr das Randwertproblem unmittelbar auf ein Quadraturproblem zurückgeführt werden kann.

$\alpha_{\min} = 30^\circ,$
 $\alpha_{\max} = 80^\circ$ ———
 60° - - -
 40° - · - ·

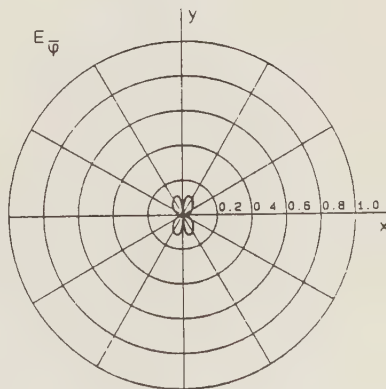
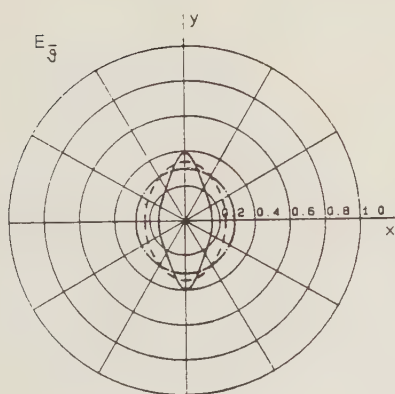
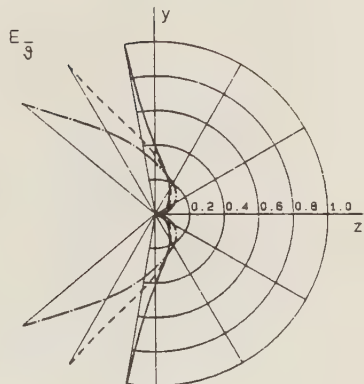
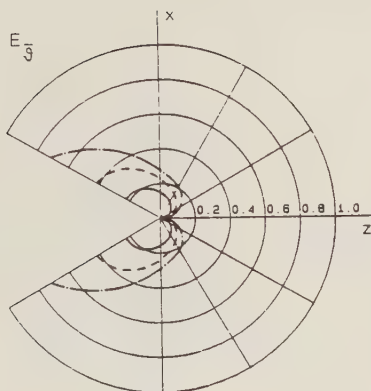
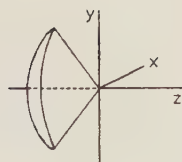


Abbildung 4.2.3: *Fernfeld eines Dipols vor dem elliptischen Kegel*
Dipol auf der z-Achse in z-Richtung ($\tau_0/\lambda_0 = 0.1$)

$$\alpha_{\min} = 30^\circ,$$

$$\alpha_{\max} = 80^\circ \text{ ———}$$

$$60^\circ \text{ - - -}$$

$$40^\circ \text{ - · - ·}$$

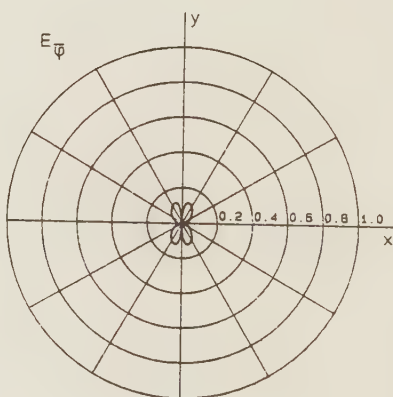
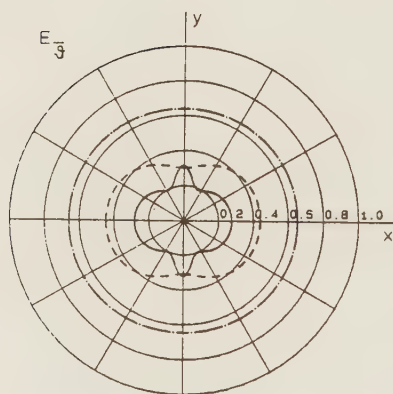
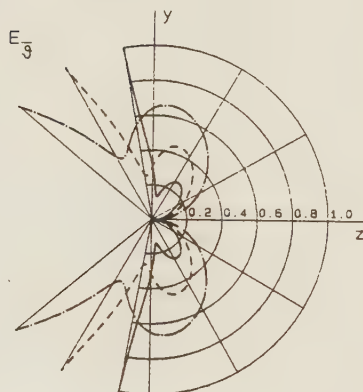
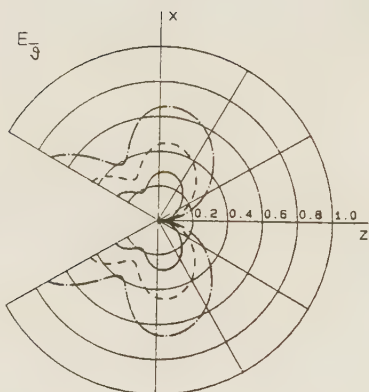
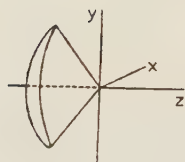


Abbildung 4.2.4: *Fernfeld eines Dipols vor dem elliptischen Kegel
Dipol auf der z-Achse in z-Richtung ($r_0/\lambda_0 = 0.5$)*

$\alpha_{\min} = 30^\circ,$
 $\alpha_{\max} = 80^\circ$ ———
 60° - - -
 40° - · - ·

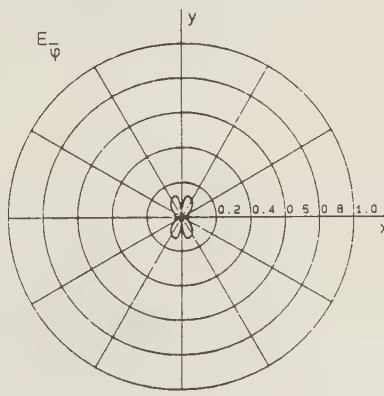
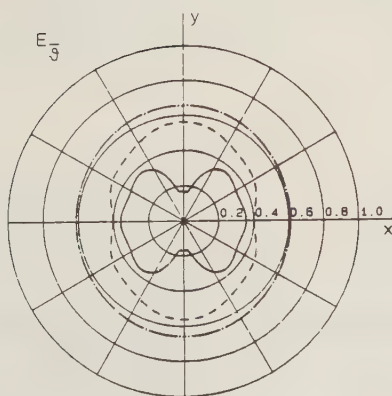
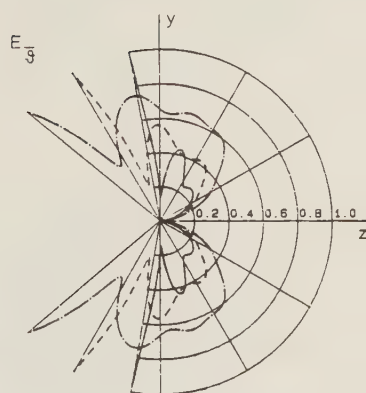
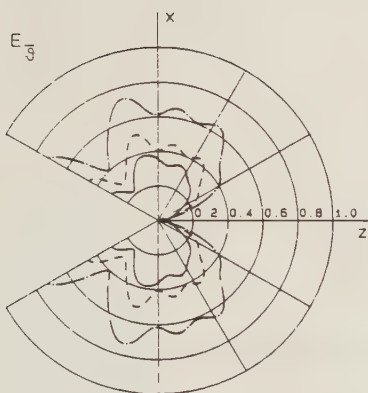
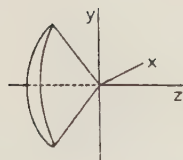


Abbildung 4.2.5: Fernfeld eines Dipols vor dem elliptischen Kegel
 Dipol auf der z-Achse in z-Richtung ($r_0/\lambda_0 = 1.0$)

$$\alpha_{\min} = 30^\circ,$$

$$\alpha_{\max} = 80^\circ$$

$$60^\circ$$

$$40^\circ$$

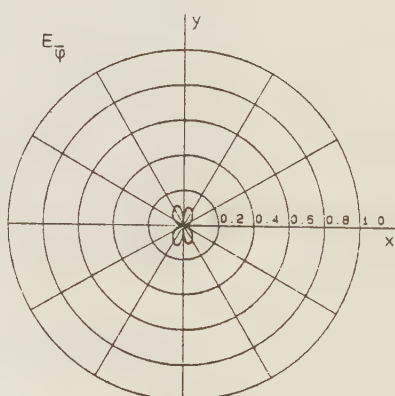
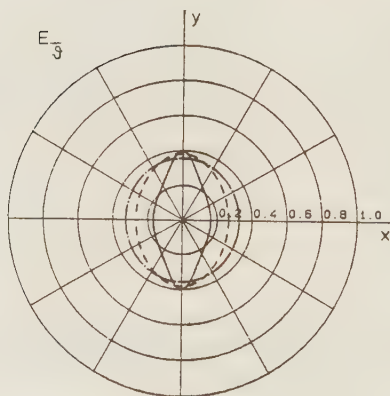
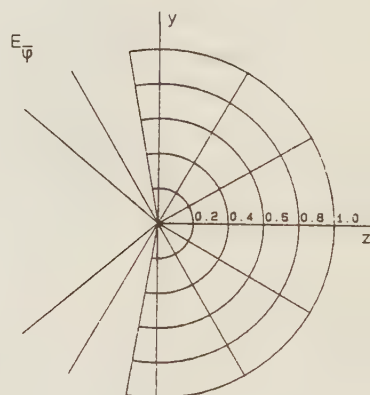
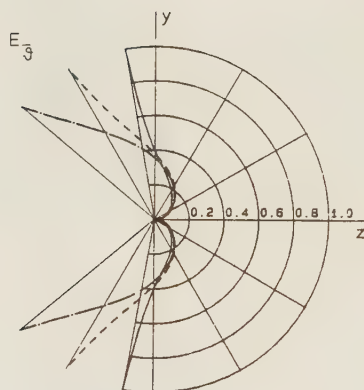
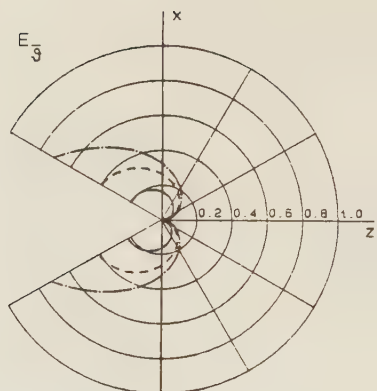
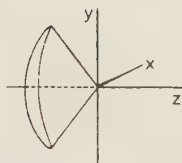


Abbildung 4.2.6: Fernfeld eines Dipols vor dem elliptischen Kegel
Dipol auf der $-x$ -Achse in z -Richtung
($\tau_0/\lambda_0 = 0.01$)

$\alpha_{\min} = 30^\circ,$
 $\alpha_{\max} = 80^\circ$ ———
 60° - - -
 40° - · - ·

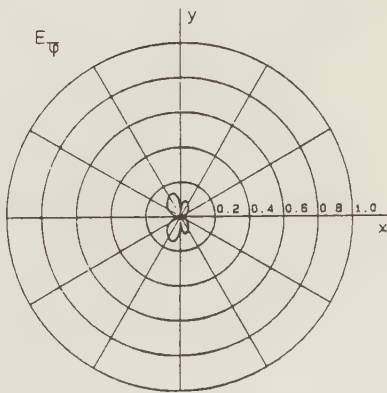
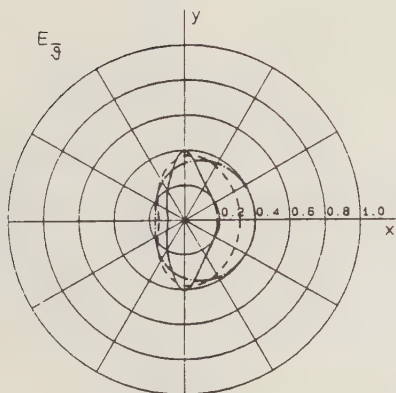
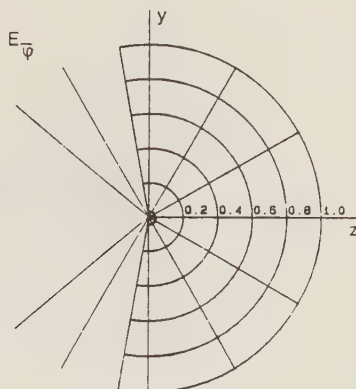
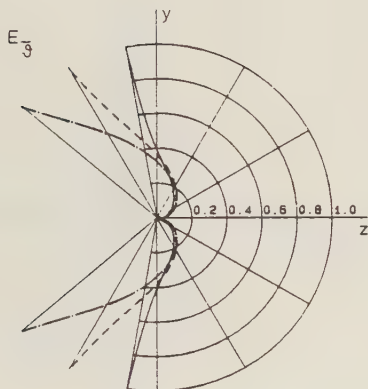
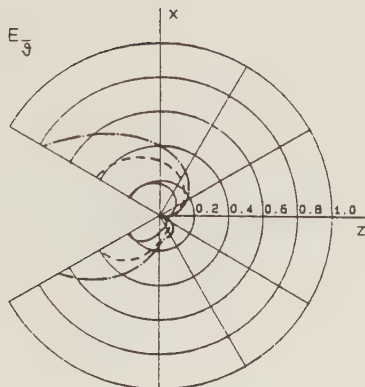
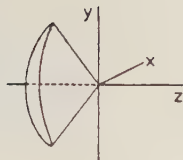


Abbildung 4.2.7: Fernfeld eines Dipols vor dem elliptischen Kegel
 Dipol auf der $-x$ -Achse in z -Richtung
 $(r_0/\lambda_0 = 0.1)$

$$\alpha_{\min} = 30^\circ,$$

$$\alpha_{\max} = 80^\circ$$

$$60^\circ \text{ --- } \text{dashed line}$$

$$40^\circ \text{ - - - } \text{dash-dot line}$$

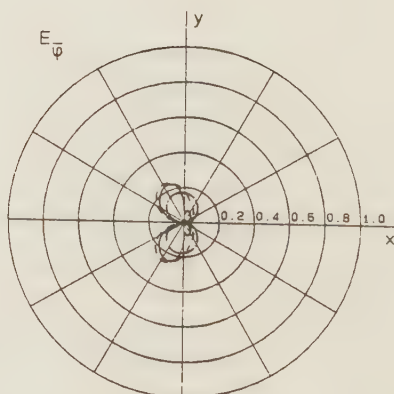
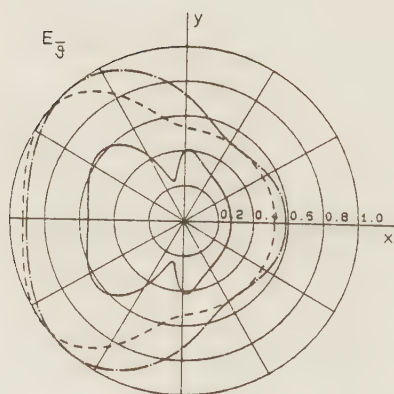
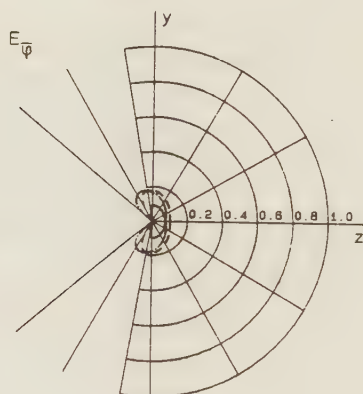
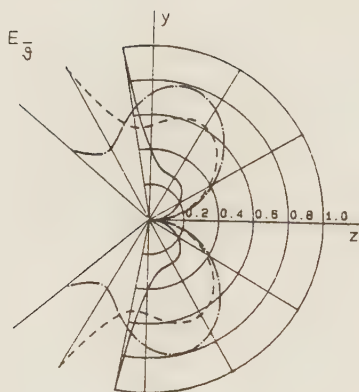
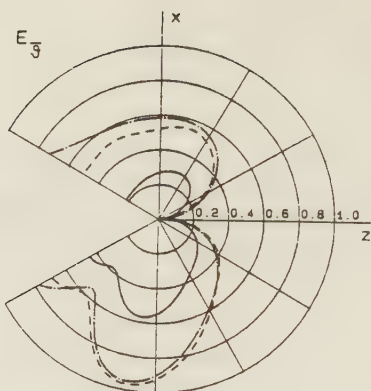
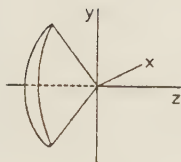


Abbildung 4.2.8: Fernfeld eines Dipols vor dem elliptischen Kegel
Dipol auf der $-x$ -Achse in z -Richtung
($\tau_0/\lambda_0 = 0.5$)

$$\alpha_{\min} = 30^\circ,$$

$$\alpha_{\max} = 80^\circ \text{ ———}$$

$$60^\circ \text{ - - -}$$

$$40^\circ \text{ - - -}$$

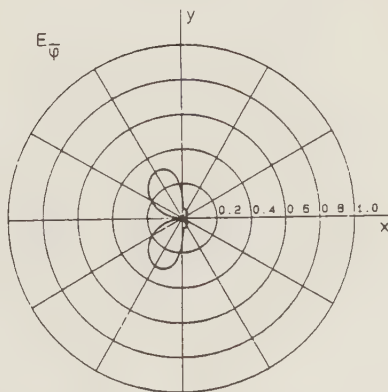
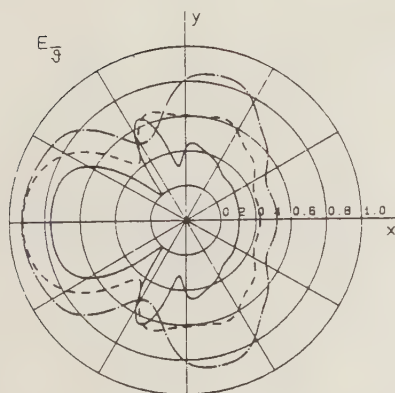
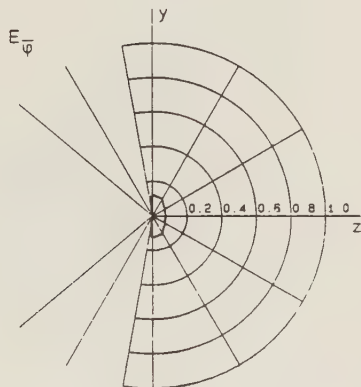
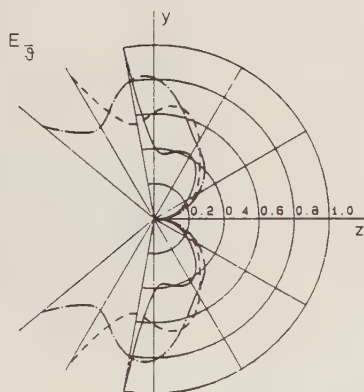
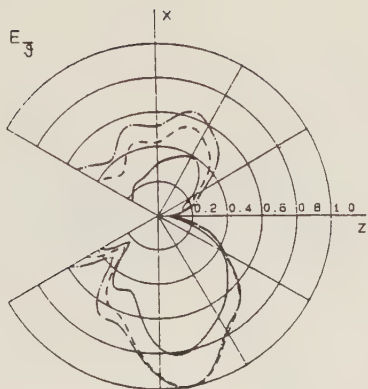
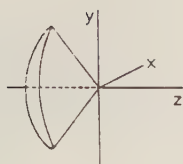


Abbildung 4.2.9: Fernfeld eines Dipols vor dem elliptischen Kegel
Dipol auf der $-x$ -Achse in z -Richtung
($r_0/\lambda_0 = 1.0$)

$$\alpha_{\min} = 0^\circ,$$

$$\alpha_{\max} = 80^\circ \quad \text{—}$$

$$50^\circ \quad \text{---}$$

$$20^\circ \quad \text{- - -}$$

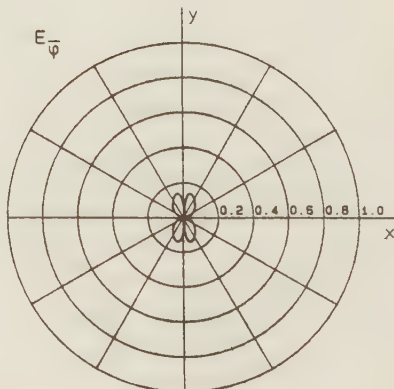
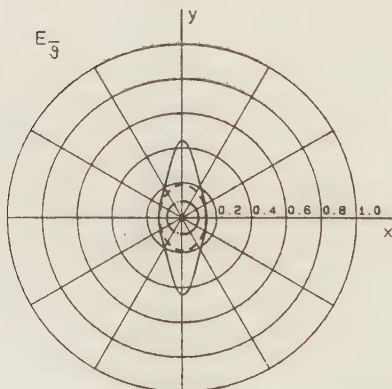
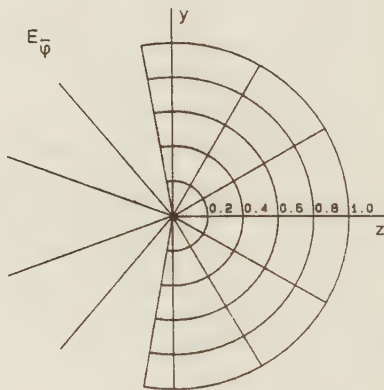
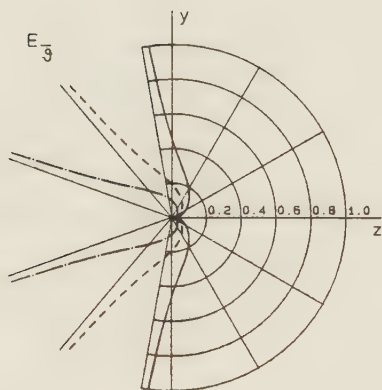
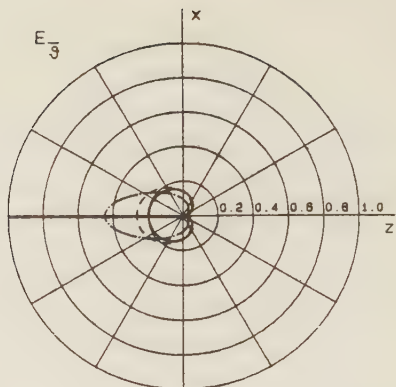
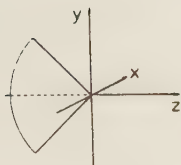


Abbildung 4.2.10: Fernfeld eines Dipols vor einem Sektor
Dipol auf der $-x$ -Achse in z -Richtung
($r_0/\lambda_0 = 0.01$)

$$\alpha_{\min} = 0^\circ,$$

$$\alpha_{\max} = 80^\circ \quad \text{---}$$

$$50^\circ \quad \text{--- --}$$

$$20^\circ \quad \text{--- - -}$$

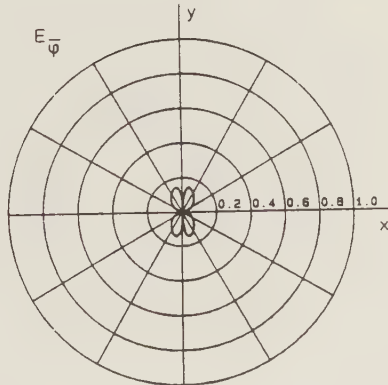
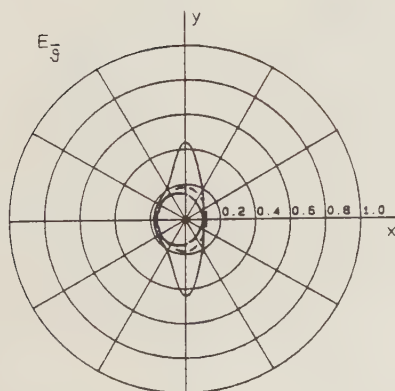
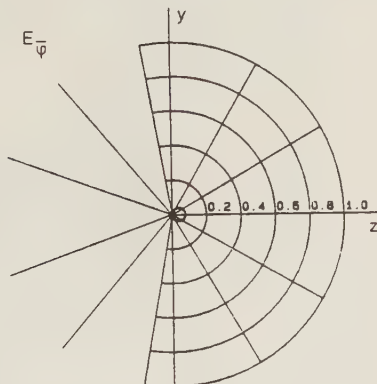
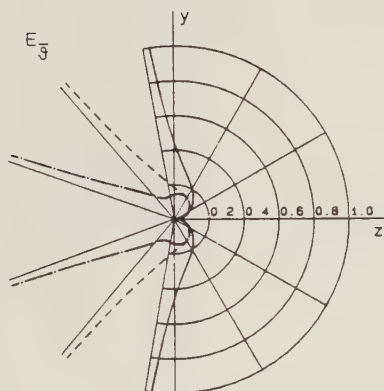
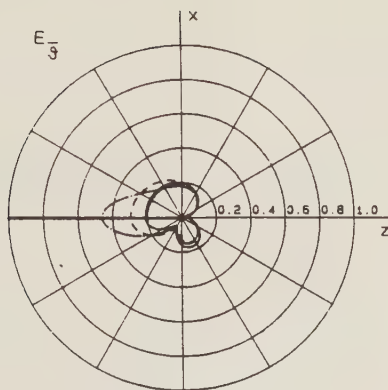
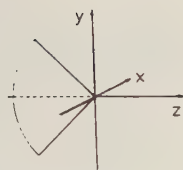


Abbildung 4.2.11: Fernfeld eines Dipols vor einem Sektor
Dipol auf der $-x$ -Achse in z -Richtung ($r_0/\lambda_0 = 0.1$)

$$\alpha_{\min} = 0^\circ,$$

$$\alpha_{\max} = 80^\circ \quad \text{—}$$

$$50^\circ \quad \text{---}$$

$$20^\circ \quad \text{- - -}$$

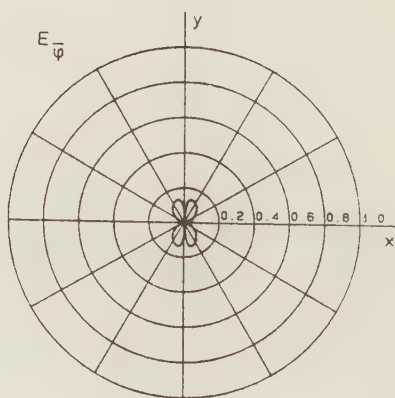
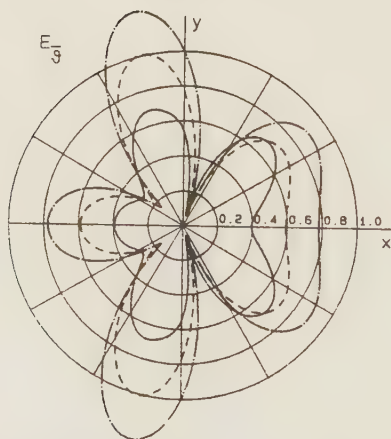
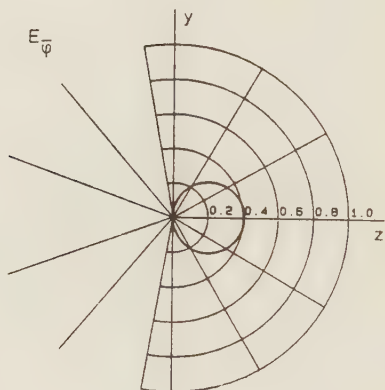
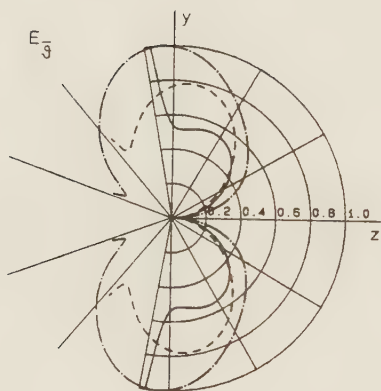
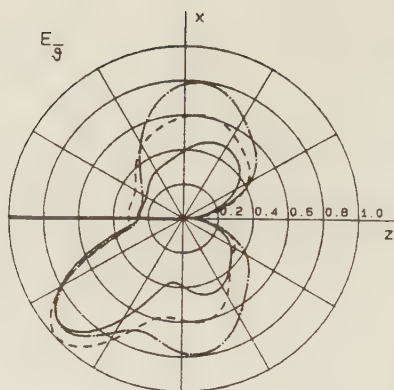
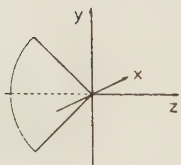


Abbildung 4.2.12: Fernfeld eines Dipols vor einem Sektor
Dipol auf der $-x$ -Achse in z -Richtung ($r_0/\lambda_0 = 0.5$)

4.3 Das Strahlungsfeld eines Ringstromes vor einem elliptischen Kegel

Die Auswertung der Integraldarstellung des Feldes einer Stromverteilung vor einem elliptischen Kegel nach Gl. 4.2.1 ist im allgemeinen dann geschlossen durchführbar, wenn - wie in Abschnitt 4.2 - die vorgegebene Stromdichte eine besonders einfache mathematische Struktur besitzt, oder aber, wenn die Stromlinien dieser Verteilung mit Koordinatenlinien der elliptischen Kegelskoordinaten zusammenfallen. Dies ist z.B. der Fall bei einem linienförmigen Kreisstrom I_0 in der (x, y) -Ebene, der konzentrisch zu der Kegelspitze angeordnet ist (Abb. 4.3.1).

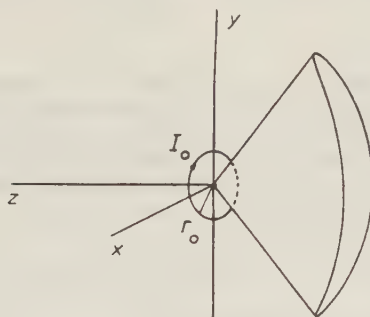


Abbildung 4.3.1: *Linienförmiger Kreisstrom vor einem elliptischen Kegel*

Die Stromdichteverteilung dieser Quelle ist gegeben durch

$$\mathbf{J}(\mathbf{r}') = \frac{I_0}{r_0 s_{\vartheta'}} \delta(r' - r_0) \delta(\vartheta' - \frac{\pi}{2}) \mathbf{e}_{\varphi'} \quad (4.3.1)$$

Da wir uns nur für das Fernfeld der Anordnung interessieren, kann in der Integraldarstellung des Feldes (Gl. 4.2.1) wieder die Darstellung der Greenschen Dyade nach Gl. 3.3.23 eingesetzt werden.¹⁰

¹⁰In der Integraldarstellung der elektrischen Feldstärke sind $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$ in dem Argument

Mit der expliziten Darstellung der $\mathbf{M}$ - und $\mathbf{N}$ -Funktionen nach Tab. 3.1.1 und dem Volumenelement

$$dv' = r'^2 s_{\vartheta'} s_{\varphi'} d\vartheta' d\varphi'$$

findet man dann für die elektrische Feldstärke

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = & -\kappa\tau_0\omega\mu I_0 \sum_i \frac{\mathbf{M}_{q_i}^{(2)}(\mathbf{r})}{q_i(q_i+1)} j_{q_i}(\kappa\tau_0) \frac{d\Theta_{q_i}(\vartheta')}{d\vartheta'} \bigg|_{\frac{\pi}{2}}^0 \int_0^{2\pi} \frac{\Phi_{q_i}(\varphi')}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2 \varphi'}} d\varphi' \\ & + \omega\mu I_0 \sum_i \frac{\mathbf{N}_{p_i}^{(2)}(\mathbf{r})}{p_i(p_i+1)} \frac{d}{dr'} [r' j_{p_i}(\kappa r')] \bigg|_{r_0} \Theta_{p_i}\left(\frac{\pi}{2}\right) \int_0^{2\pi} \frac{d\Phi_{p_i}(\varphi')}{d\varphi'} d\varphi' \end{aligned} \quad (4.3.2)$$

Das Integral in der zweiten Summe verschwindet hier aufgrund der Periodizität der Laméschen Funktionen $\Phi_{\nu}(\varphi')$. Zur Berechnung des Integrales in der zweiten Summe werden die Reihendarstellungen der periodischen Laméschen Funktionen nach Gl. A2.1.3 eingesetzt. Dabei sieht man, daß dieses Integral nur für den Funktionstyp I einen von Null verschiedenen Wert liefert. Für diesen Funktionstyp ist in Anhang A2.1 die Darstellung¹¹

$$\Phi_{q_i}(\varphi') = \sqrt{1-k'^2 \sin^2 \varphi'} \sum_{i=0}^{\infty} C_{2i}^{(q_i)} \cos 2i\varphi'$$

angegeben, so daß man für das Integral erhält

$$\int_0^{2\pi} \frac{\Phi_{q_i}(\varphi')}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2 \varphi'}} d\varphi' = 2\pi C_0^{(q_i)} \quad (4.3.3)$$

Für die elektrische Feldstärke ergibt sich damit die Multipolentwicklung

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -2\pi\kappa\tau_0\omega\mu I_0 \sum_i^{(I)} \frac{\mathbf{M}_{q_i}^{(2)}(\mathbf{r})}{q_i(q_i+1)} j_{q_i}(\kappa\tau_0) \frac{d\Theta_{q_i}(\vartheta')}{d\vartheta'} \bigg|_{\frac{\pi}{2}}^0 C_0^{(q_i)} \quad (4.3.4)$$

der Greenschen Dyade vertauscht. Das erste Argument ist dort $\mathbf{r}'$. Da hier immer $|\mathbf{r}'| < |\mathbf{r}|$ gilt, ist also das erste Argument der Greenschen Dyade kleiner als das zweite, weshalb hier die Darstellung nach Gl. 3.3.23 einzusetzen ist.

¹¹Der zusätzliche obere Index an den Koeffizienten wurde hier eingeführt, um die Abhängigkeit von dem Eigenwert q_i zu verdeutlichen

Aus der zweiten Maxwell'schen Gleichung (3.1.1) kann dann unter Berücksichtigung von Gl. 3.1.7 die magnetische Feldstärke zu

$$\begin{aligned}\mathbf{H}(\mathbf{r}) &= \frac{-1}{j\omega\mu} \nabla \times \mathbf{E} \\ &= -2\pi j\kappa^2 r_0 I_0 \sum_i^{(I)} \frac{\mathbf{N}_{q_i}^{(2)}(\mathbf{r})}{q_i(q_i - 1)} j_{q_i}(\kappa r_0) \frac{d\Theta_{q_i}(\vartheta')}{d\vartheta'} \bigg|_{\frac{\pi}{2}} C_0^{(q_i)} \quad (4.3.5)\end{aligned}$$

berechnet werden.

Das Fernfeld ergibt sich daraus durch Vernachlässigung der r -Komponente gegenüber den transversalen Komponenten und Einsetzen der asymptotischen Darstellung der Hankelfunktionen. Man erhält den Ausdruck (vgl. Gl. 3.1.16)

$$\mathbf{H}_f(\mathbf{r}) = 2\pi j\kappa^2 r_0 I_0 \frac{e^{-j\kappa r}}{\kappa r} \sum_i^{(I)} \frac{j_{q_i} C_0^{(q_i)}}{q_i(q_i + 1)} j_{q_i}(\kappa r_0) \frac{d\Theta_{q_i}(\vartheta')}{d\vartheta'} \bigg|_{\frac{\pi}{2}} \mathbf{n}_{q_i}(\vartheta, \varphi) \quad (4.3.6)$$

In Abb. 4.3.2 bis 4.3.4 ist der Verlauf der Fernfeldkomponenten für verschiedene Kegelöffnungswinkel und verschiedene Kreisstromradien aufgetragen. Für sehr kleine Radien des Kreisstromes geht das Feld über in das eines magnetischen Dipols unmittelbar vor der Spitze des Kegels. Dieses Feld kann im übrigen nicht durch Dualitätsbeziehungen aus dem Feld des Hertz'schen Dipols vor dem elliptischen Kegel hergeleitet werden, da auch in dem vorliegenden Fall eine elektrische Randbedingung auf dem Kegelmantel vorgegeben ist. Bei größeren Radien wird das Fernfelddiagramm zunächst verformt und bei $r_0/\lambda_0 = 1$ treten wieder deutlich Interferenzeffekte auf.

Der Fall der Entartung des elliptischen Kegels zu einem Sektor ist hier nicht behandelt worden. Bei der hier untersuchten Anregung durch einen über dem Kreisring konstanten Strom würde der metallische Sektor das Feld des Kreisstroms nicht stören, da die elektrische Feldstärke senkrecht zu der Sektorebene polarisiert ist. Man kann dies auch aus der Felddarstellung nach Gl. 4.3.4 ablesen. Dort treten nur Eigenfunktionen Y_{q_i} auf, die die Randbedingung

$$\frac{\partial Y_{q_i}(\vartheta, \varphi)}{\partial \vartheta} \bigg|_{\vartheta=\vartheta_0} = 0$$

erfüllen, und von dem Symmetriotyp I sind. Für den Sektor $\vartheta_0 = \pi$ stimmt diese Randbedingung aber mit der Eindeutigkeitsbedingung des Funktionstyps

auf dem Sektor überein (Tab. 3.2.1), so daß das Feld aus den Eigenfunktionen des freien Raumes aufgebaut wird. Die Lösung der Randwertaufgabe ist also wie erwartet für $\vartheta_0 = \pi$ gleich der Lösung des entsprechenden Freiraumproblems.

$$\alpha_{\min} = 30^\circ,$$

$$\alpha_{\max} = 80^\circ \text{ ———}$$

$$60^\circ \text{ - - -}$$

$$40^\circ \text{ - - - -}$$

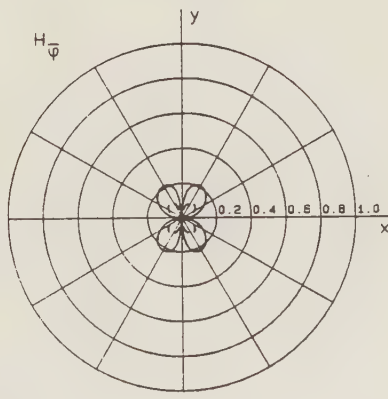
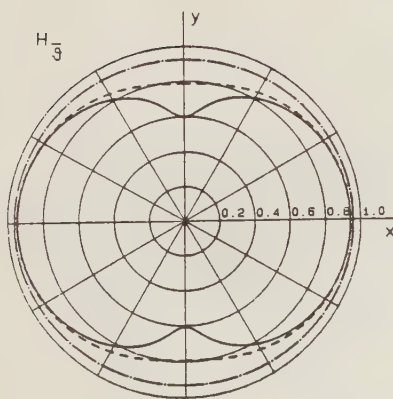
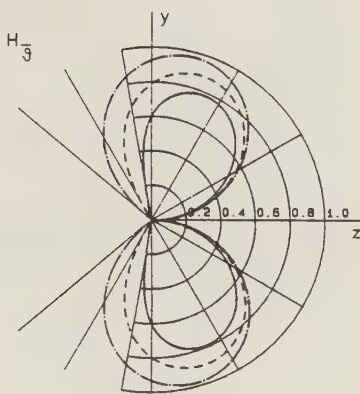
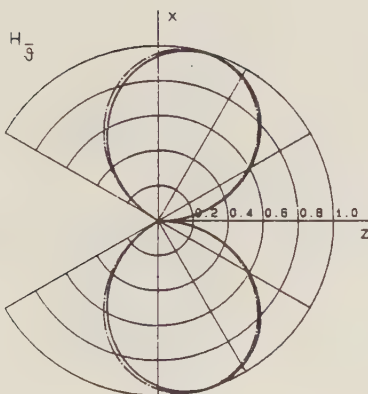
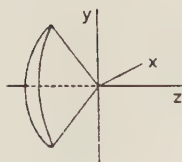


Abbildung 4.3.2: *Fernfeld eines Kreisstromes vor dem elliptischen Kegel*
 $(r_0/\lambda_0 = 0.1)$

$$\alpha_{\min} = 30^\circ,$$

$$\alpha_{\max} = 80^\circ \text{ ———}$$

$$60^\circ \text{ - - -}$$

$$40^\circ \text{ - · - ·}$$

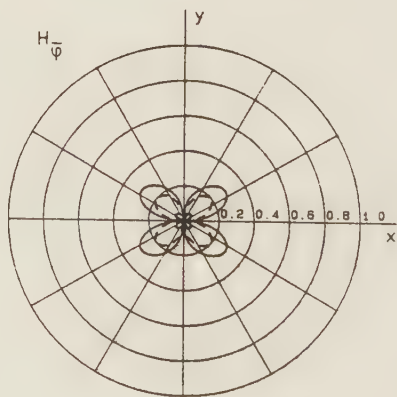
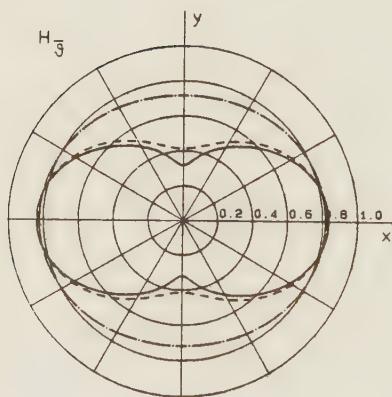
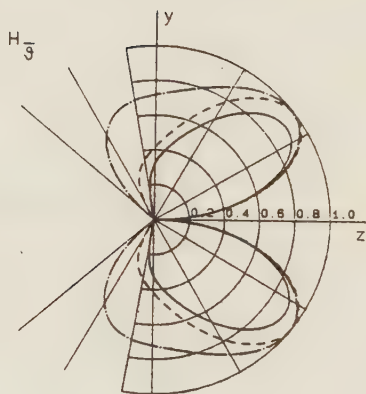
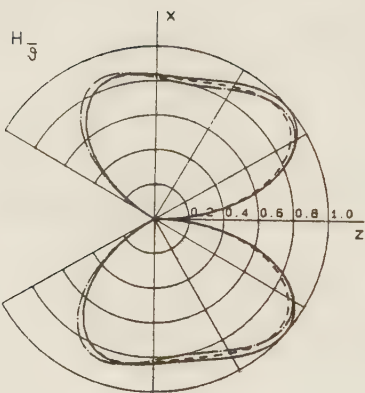
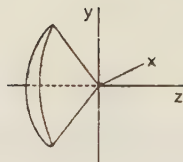


Abbildung 4.3.3: *Fernfeld eines Kreisstromes vor dem elliptischen Kegel*
 $(r_0/\lambda_0 = 0.5)$

$$\alpha_{\min} = 30^\circ,$$

$$\alpha_{\max} = 80^\circ \quad \text{—}$$

$$60^\circ \quad \text{---}$$

$$40^\circ \quad \text{- - -}$$

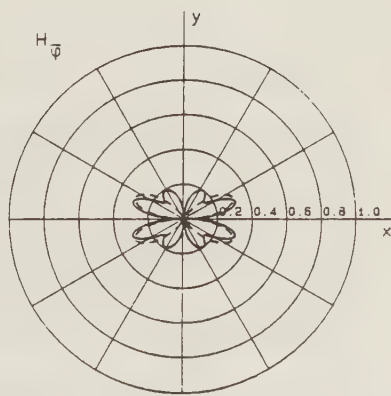
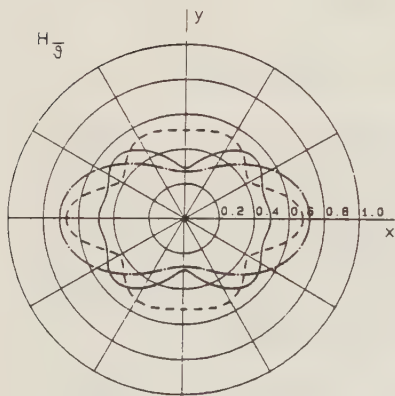
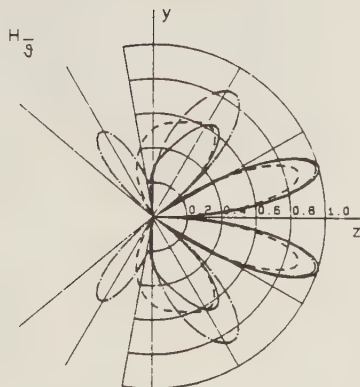
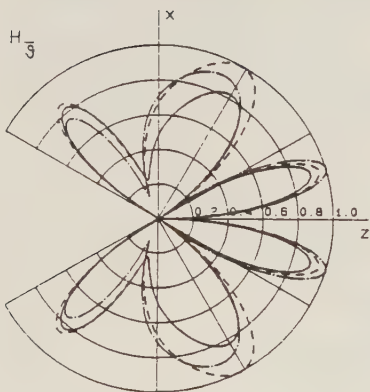
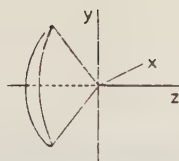


Abbildung 4.3.4: *Fernfeld eines Kreisstromes vor dem elliptischen Kegel*
 $(\tau_0/\lambda_0 = 1.0)$

4.4 Der elliptische Kegel als Aperturstrahler

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir als Quelle des Feldes eine Stromdichteverteilung vorgegeben, und die tangentialen Feldstärke auf dem Kegelmantel zu Null angenommen. Stattdessen wollen wir nun den Fall behandeln, daß die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke auf einem Teilbereich des Kegelmantels ungleich Null sind, und als Feldquellen dienen (Abb. 4.4.1). Die Volumenstromdichte setzen wir in dem gesamten Lösungsgebiet zu Null.

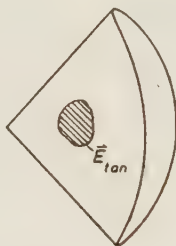


Abbildung 4.4.1: *Der elliptische Kegel als Aperturstrahler*

Anwendung findet dieser Fall bei der Berechnung des Feldes von Aperturstrahlern, für die sinnvolle Annahmen über die Feldverteilung in der Apertur gemacht werden können. Da Annahmen über die Feldverteilung meist nur für die elektrische oder für die magnetische Feldstärke nicht aber für beide zugleich gemacht werden können, erweist sich hier das Konzept der Greenschen Dyade zu einer bestimmten Randbedingung als vorteilhaft ([2],[56]).

Wir nehmen nun an, daß die Tangentialkomponenten der elektrischen Feldstärke in einer Apertur A auf dem Kegelmantel vorgegeben sind. Dann kann das Strahlungsfeld dieser Apertur nach Gl. 3.3.8 als Integral

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{j\omega\mu} \iint_A [\mathbf{n}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \cdot \underline{\underline{\Gamma}}_e(\mathbf{r}', \mathbf{r}) d\mathbf{f}' \quad (4.4.1)$$

dargestellt werden.

Sei nun die eingeprägte tangentielle Feldstärke in der Apertur durch die Komponenten

$$\mathbf{E}_{tan}^e(\mathbf{r}') = E_r^e(r', \varphi') \mathbf{e}_{r'} - E_\varphi^e(r', \varphi') \mathbf{e}_{\varphi'} \quad (4.4.2)$$

gegeben. Dann gilt mit $\mathbf{n}' = -\mathbf{e}_{\varphi'}$

$$\mathbf{n}' \times \mathbf{E}_{tan}^e(\mathbf{r}') = E_r^e(r', \varphi') \mathbf{e}_{\varphi'} - E_\varphi^e(r', \varphi') \mathbf{e}_{r'} \quad (4.4.3)$$

Unter der Voraussetzung, daß der Betrag des Aufpunktsvektors $\mathbf{r}$ größer ist als der maximale Abstand der Aperturpunkte von der Kegelspitze, was im Fernfeld immer erfüllt ist, kann für die Greensche Dyade die Darstellung nach Gl. 3.3.23 eingesetzt werden.¹²

Für die Rotation der Greenschen Dyade findet man dann mit (s. Gl. 3.1.7 und 3.1.8)

$$\nabla \times \mathbf{M} = \kappa \mathbf{N}$$

und

$$\nabla \times \mathbf{N} = \kappa \mathbf{M}$$

die Entwicklung

$$\begin{aligned} \nabla' \times \underline{\mathbf{L}}_e(\mathbf{r}', \mathbf{r}) = & - \kappa^2 \omega \mu \sum_i \frac{\mathbf{N}_{q_i}^{(1)}(\mathbf{r}') \mathbf{M}_{q_i}^{(2)}(\mathbf{r})}{q_i(q_i + 1)} \\ & - \kappa^2 \omega \mu \sum_i \frac{\mathbf{M}_{p_i}^{(1)}(\mathbf{r}') \mathbf{N}_{p_i}^{(2)}(\mathbf{r})}{p_i(p_i + 1)} \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

Damit ergibt sich die Felddarstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = & + j\kappa^2 \sum_i \frac{\mathbf{M}_{q_i}^{(2)}(\mathbf{r})}{q_i(q_i + 1)} \iint_A [\mathbf{n}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \cdot \mathbf{N}_{q_i}^{(1)}(\mathbf{r}') df' \\ & + j\kappa^2 \sum_i \frac{\mathbf{N}_{p_i}^{(2)}(\mathbf{r})}{p_i(p_i + 1)} \iint_A [\mathbf{n}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \cdot \mathbf{M}_{p_i}^{(1)}(\mathbf{r}') df' \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

¹²In der Integraldarstellung der elektrischen Feldstärke sind, wie in Kap. 4.3 bereits ausgeführt, $\mathbf{r}$ und $\mathbf{r}'$ in dem Argument der Greenschen Dyade vertauscht. Das erste Argument ist wieder $\mathbf{r}'$. Da hier auch $|\mathbf{r}'| < |\mathbf{r}|$ gilt, ist also das erste Argument der Greenschen Dyade kleiner als das zweite, weshalb hier die Darstellung nach Gl. 3.3.23 einzusetzen ist.

Durch Einsetzen der Komponentendarstellungen der **M**- und **N**-Funktionen (s. Tab. 3.1.1) findet man für die Skalarprodukte in den Integranden dann

$$\begin{aligned} [\mathbf{n}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \cdot \mathbf{N}_{q_i}^{(1)}(\mathbf{r}') &= \frac{j_{q_i}(\kappa r')}{\kappa r'} q_i(q_i + 1) Y_{q_i}(\vartheta_0, \varphi') E_{\varphi}^e(r', \varphi') \\ &\quad - \frac{1}{\kappa r'} \frac{d}{dr'} [r' j_{q_i}(\kappa r')] \frac{1}{s_{\varphi'}} \frac{\partial Y_{q_i}(\vartheta_0, \varphi')}{\partial \varphi'} E_r^e(r', \varphi') \end{aligned}$$

und

$$[\mathbf{n}' \times \mathbf{E}(\mathbf{r}')] \cdot \mathbf{M}_{p_i}^{(1)}(\mathbf{r}') = j_{p_i}(\kappa r') \frac{1}{s_{\vartheta'}} \frac{\partial Y_{p_i}(\vartheta_0, \varphi')}{\partial \vartheta'} \bigg|_{\vartheta_0} E_r^e(r', \varphi') ,$$

so daß sich schließlich die Integraldarstellung

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= + j\kappa \sum_i \mathbf{M}_{q_i}^{(2)}(\mathbf{r}) \iint_A j_{q_i}(\kappa r') s_{\varphi'} Y_{q_i}(\vartheta_0, \varphi') E_{\varphi}^e(r', \varphi') dr' d\varphi' \\ &\quad - j\kappa \sum_i \frac{\mathbf{M}_{q_i}^{(2)}(\mathbf{r})}{q_i(q_i + 1)} \iint_A \frac{d}{dr'} [r' j_{q_i}(\kappa r')] \frac{\partial Y_{q_i}(\vartheta_0, \varphi')}{\partial \varphi'} E_r^e(r', \varphi') dr' d\varphi' \\ &\quad + j\kappa^2 \sum_i \frac{\mathbf{N}_{p_i}^{(2)}(\mathbf{r})}{p_i(p_i + 1)} \iint_A r' j_{p_i}(\kappa r') \frac{s_{\varphi'}}{s_{\vartheta'}} \frac{\partial Y_{p_i}(\vartheta', \varphi')}{\partial \vartheta'} \bigg|_{\vartheta_0} E_r^e(r', \varphi') dr' d\varphi' \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

ergibt.

Betrachten wir nun speziell eine schmale, schlitzförmige Apertur (Abb. 4.4.2), die bei $r = r_0$ um den Kegelumfang läuft, und in der eine konstante r -Komponente der elektrischen Feldstärke vorgegeben ist. Die φ -Komponente der Feldstärke sei Null. Man kann diese Apertur durch einen δ -Schlitz annähern, in dem die elektrische Feldstärke durch Anlegen einer hochfrequenten Wechselspannung V_0 erzeugt wird. Die Annahme einer konstanten Aperturbelegung ist dann sinnvoll, wenn der Abstand r_0 des Schlitzes von der Kegelspitze nicht zu groß wird.

Die Feldstärke in der Apertur ist in diesem Fall gegeben durch

$$\mathbf{E}_{\text{tan}}^e(\mathbf{r}') := V_0 \delta(r' - r_0) \mathbf{e}_r \quad (4.4.7)$$

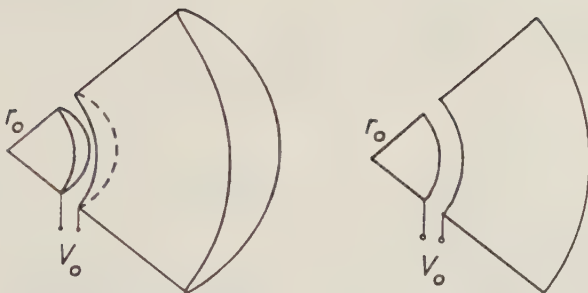


Abbildung 4.4.2: *Schlitzgespeister elliptischer Kegel bzw. Sektor*

für $0 \leq \varphi' \leq 2\pi$, so daß man nach Gl. 4.4.6 erhält

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}(\mathbf{r}) = & -j\kappa \sum_i \frac{\mathbf{M}_{q_i}^{(2)}(\mathbf{r})}{q_i(q_i+1)} V_0 \frac{d}{dr'} [r' j_{q_i}(\kappa r')] \Big|_{r_0} \int_0^{2\pi} \frac{\partial Y_{q_i}(\vartheta_0, \varphi')}{\partial \varphi'} d\varphi' \\
 & + j\kappa^2 \sum_i \frac{\mathbf{N}_{p_i}^{(2)}(\mathbf{r})}{p_i(p_i+1)} V_0 r_0 j_{p_i}(\kappa r_0) \int_0^{2\pi} \frac{s_{\varphi'}}{s_{\vartheta'}} \frac{\partial Y_{p_i}(\vartheta', \varphi')}{\partial \vartheta'} \Big|_{\vartheta_0} d\varphi'
 \end{aligned}
 \quad (4.4.8)$$

Das Integral in der ersten Summe verschwindet aufgrund der Periodizität der Laméschen Funktionen. Für das zweite Integral erhält man

$$\begin{aligned}
 I_1 &:= \int_0^{2\pi} \frac{s_{\varphi'}}{s_{\vartheta'}} \frac{\partial Y_{p_i}(\vartheta', \varphi')}{\partial \vartheta'} \Big|_{\vartheta_0} d\varphi' \\
 &= \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \vartheta_0} \frac{d\Theta_{p_i}(\vartheta')}{d\vartheta'} \Big|_{\vartheta_0} \int_0^{2\pi} \frac{\Phi_{p_i}(\varphi')}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi'}} d\varphi' .
 \end{aligned}$$

Dieses Integral ist nur für Funktionstyp I von Null verschieden, so daß mit

Hilfe der Reihenentwicklung (Gl. A2.1.3)

$$\Phi_{p_i}(\varphi') = \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi'} \sum_{i=0}^{\infty} C_{2i}^{(p_i)} \cos 2i\varphi'$$

folgt

$$I_1 = \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \vartheta_0} \frac{d\Theta_{p_i}(\vartheta')}{d\vartheta'} \Big|_{\vartheta_0} 2\pi C_0^{(p_i)}$$

Für die elektrische Feldstärke ergibt sich somit

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = 2\pi j \kappa^2 r_0 V_0 \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \vartheta_0} \sum_i \frac{\mathbf{N}_{p_i}^{(2)}(\mathbf{r})}{p_i(p_i + 1)} j_{p_i}(\kappa r_0) \frac{d\Theta_{p_i}(\vartheta')}{d\vartheta'} \Big|_{\vartheta_0} C_0^{(p_i)} \quad (4.4.9)$$

In dem Feld dieses Strahlers sind also nur elektrische Moden enthalten. Diese Eigenschaft des kegelförmigen Schlitzstrahlers ist für den Spezialfall des rotationssymmetrischen Kegels aus der Literatur bekannt ([2]). Dort wird dieses Verhalten direkt aus der Symmetrie der Anordnung abgelesen. In dem hier untersuchten Fall sind die Symmetrieverhältnisse nicht so leicht zu überschauen, ergeben sich aber zwangsläufig durch korrekte Anwendung der dyadischen Greenschen Funktion der Anordnung.

Für das Fernfeld des Strahlers findet man

$$\mathbf{E}_f(\mathbf{r}) =$$

$$-2\pi j \kappa^2 r_0 V_0 \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \vartheta_0} \frac{e^{-j\kappa r}}{\kappa r} \sum_i \frac{j^{p_i} j_{p_i}(\kappa r_0)}{p_i(p_i + 1)} \frac{d\Theta_{p_i}(\vartheta')}{d\vartheta'} \Big|_{\vartheta_0} C_0^{(p_i)} \mathbf{n}_{p_i}(\vartheta, \varphi) \quad (4.4.10)$$

In den Abbildungen 4.4.3 bis 4.4.5 sind die Verläufe der Fernfeldkomponenten des schlitzgespeisten elliptischen Kegels für verschiedene Kegelöffnungswinkel und verschiedene Schlitzabstände aufgetragen. Man erkennt, daß das Feld bei kleinen Schlitzabständen im wesentlichen mit dem Feld eines Dipols auf der z-Achse (Abb. 4.2.3) übereinstimmt, was aus der Symmetrie der Anregung zu erklären ist. Für größere Schlitzabstände treten deutliche Einbrüche in dem Fernfelddiagramm auf. Die Fernfelder des schlitzgespeisten Sektors sind in Abb. 4.4.6 und Abb. 4.4.7 aufgetragen. Es liegt dort eine ähnliche

$$\alpha_{\min} = 30^\circ,$$

$$\alpha_{\max} = 80^\circ \text{ ———}$$

$$60^\circ \text{ - - -}$$

$$40^\circ \text{ - - -}$$

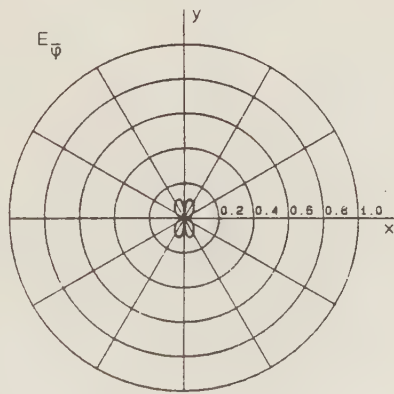
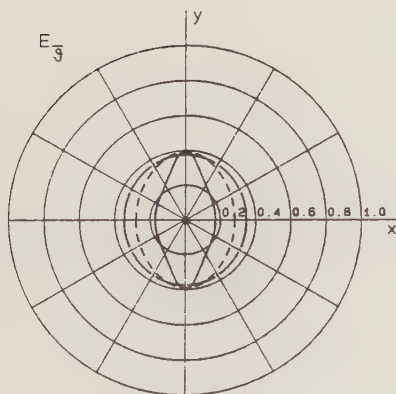
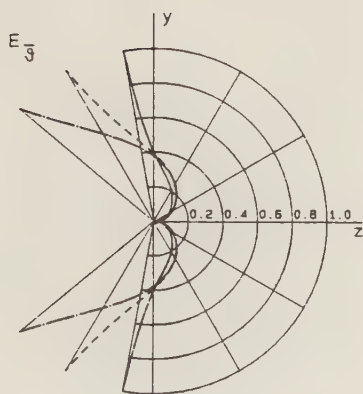
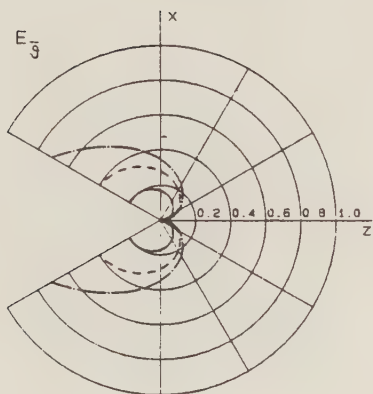
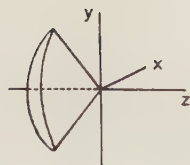


Abbildung 4.4.3: *Fernfeld eines schlitzgespeisten elliptischen Kegels*
 $r_0/\lambda_0 = 0.1$

$$\alpha_{\min} = 30^\circ,$$

$$\alpha_{\max} = 80^\circ \quad \text{——}$$

$$60^\circ \quad \text{---}$$

$$40^\circ \quad \text{- - -}$$

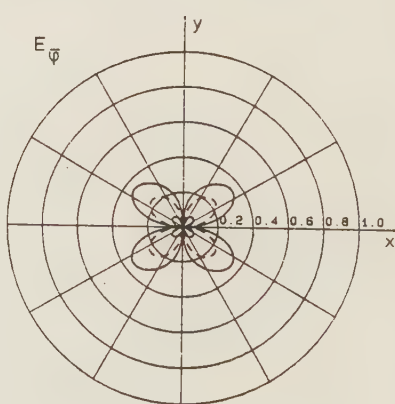
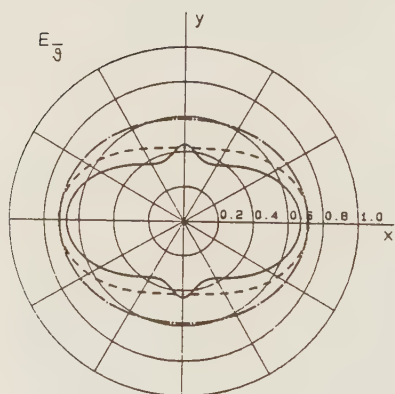
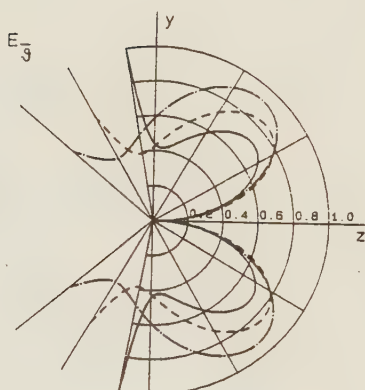
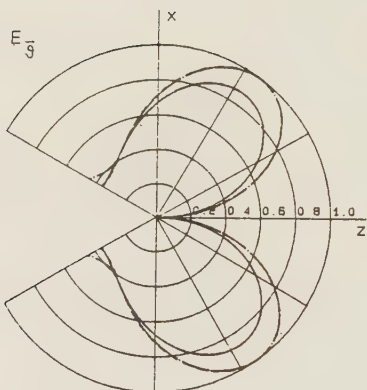
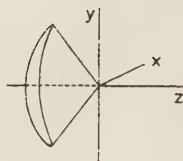


Abbildung 4.4.4: *Fernfeld eines schlitzgespeisten elliptischen Kegels*
 $r_0/\lambda_0 = 0.5$

$$\alpha_{\min} = 30^\circ,$$

$$\alpha_{\max} = 90^\circ \text{ ————}$$

$$60^\circ \text{ - - - -}$$

$$40^\circ \text{ - · - ·}$$

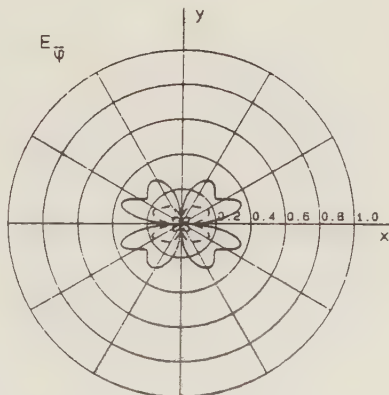
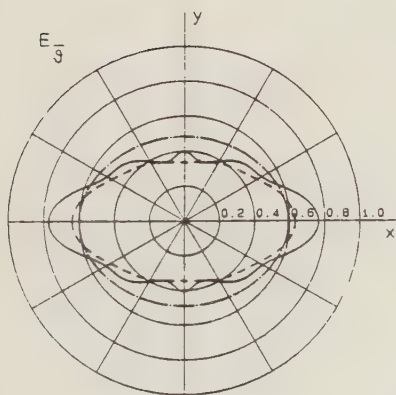
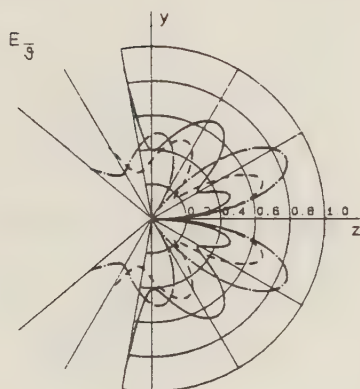
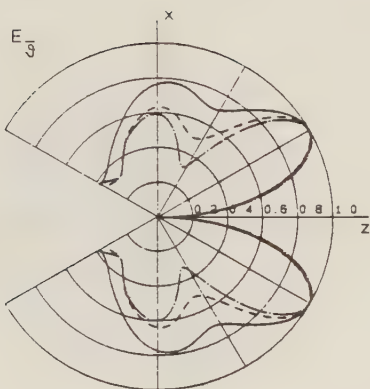
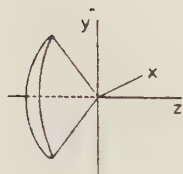


Abbildung 4.4.5: Fernfeld eines schlitzz gespeisten elliptischen Kegels
 $\tau_0/\lambda_0 = 1.0$

$$\alpha_{\min} = 0^\circ,$$

$$\alpha_{\max} = 80^\circ \quad \text{—}$$

$$50^\circ \quad \text{---}$$

$$20^\circ \quad \text{- - -}$$

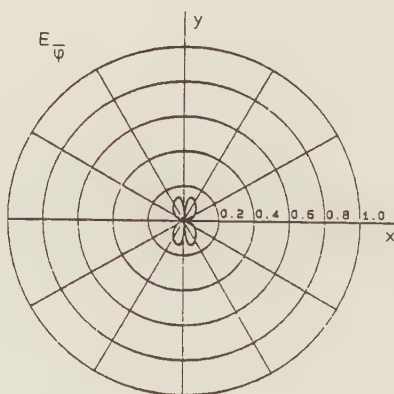
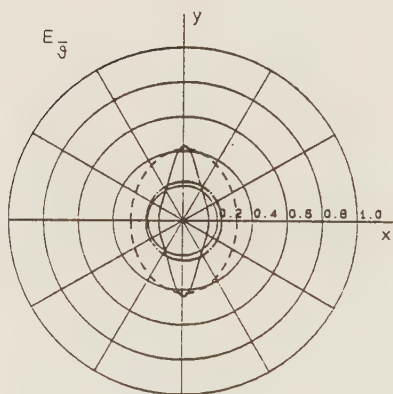
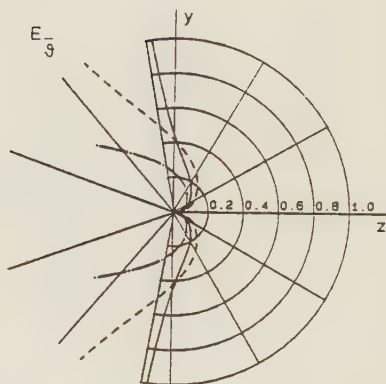
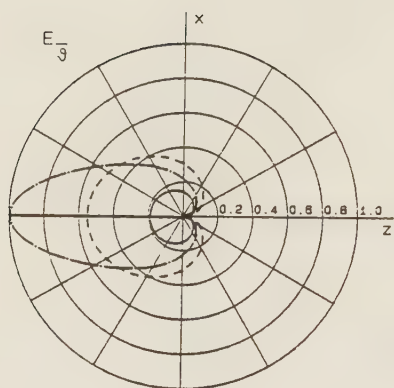
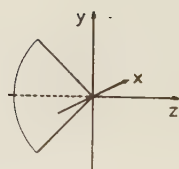


Abbildung 4.4.6: *Fernfeld eines schlitzgespeisten Sektors*
 $r_0/\lambda_0 = 0.1$

$$\alpha_{\min} = 0^\circ, \quad \alpha_{\max} = 90^\circ,$$

$$r_0/\lambda = 0.01 \quad \text{——}$$

$$0.1 \quad \text{---}$$

$$1.0 \quad \text{---}$$

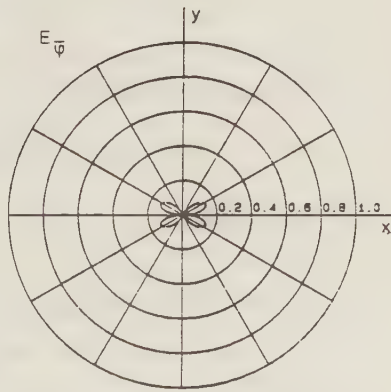
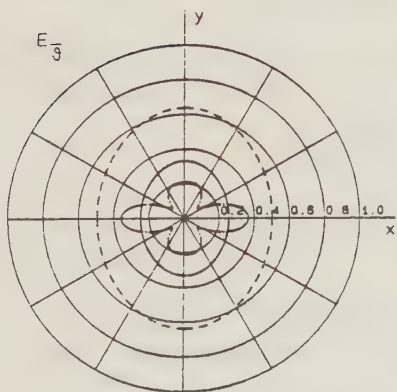
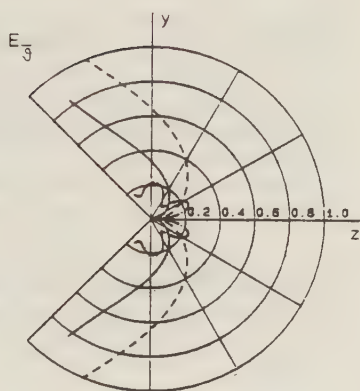
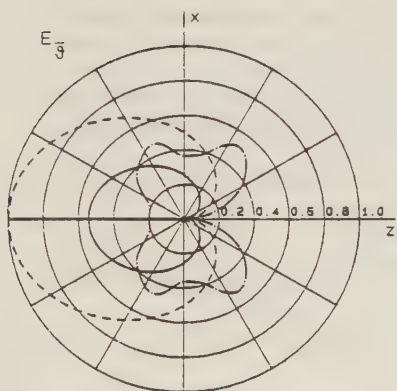
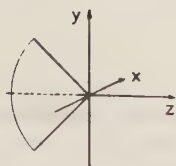


Abbildung 4.4.7: Fernfeld eines schlitzgespeisten 90° -Sektors für verschiedene Schlitzabstände

Feldstruktur wie bei dem elliptischen Kegel vor. Die Unterschiede resultieren im wesentlichen aus der Singularität des Feldes an den Sektorkanten.

Anhand der Fernfelder in den Abbildungen 4.4.3 bis 4.4.7 können nur Aussagen über die Form des Verlaufes der Fernfeldkomponenten gemacht werden, da diese in den Diagrammen aus Gründen der Anschaulichkeit normiert sind. Um auch über die absolute Größe der Fernfeldkomponenten eine Vorstellung zu erhalten berechnen wir die von der Antenne in das Fernfeld abgestrahlte Wirkleistung.

Diese gewinnt man mit Hilfe des zeitlichen Mittelwertes der Energiestromdichte, der durch [11]

$$\bar{S} = \frac{1}{2} \Re \{ \mathbf{E} \times \mathbf{H}_f^* \} \quad (4.4.11)$$

gegeben ist. Die magnetische Feldstärke ergibt sich nach der 2. Maxwellschen Gleichung aus der Rotation von $\mathbf{E}$ zu ¹³

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_f^* = \\ -2\pi \frac{\kappa^3}{\omega\mu} r_0 V_0 \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \vartheta_0} \frac{e^{j\kappa r}}{\kappa r} \sum_i \frac{(-j)^{p_i}}{p_i(p_i + 1)} j_{p_i}(\kappa r_0) \left. \frac{d\Theta_{p_i}(\vartheta')}{d\vartheta'} \right|_{\vartheta_0} C_0^{(p_i)} \mathbf{m}_{p_i}(\vartheta, \varphi) \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

Führt man zur Abkürzung die Größe

$$\alpha_i := \frac{j_{p_i}(\kappa r_0)}{p_i(p_i + 1)} \left. \frac{d\Theta_{p_i}(\vartheta')}{d\vartheta'} \right|_{\vartheta_0} C_0^{(p_i)} \quad (4.4.13)$$

ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \bar{S} = \\ \frac{1}{2} \Re \left\{ \frac{4\pi^2 \kappa^3 r_0^2 V_0^2}{\omega\mu} (1 - k^2 \cos^2 \vartheta_0) \frac{1}{r^2} \sum_i \sum_{i'} \frac{j^{p_i}}{j^{p_{i'}}} \alpha_i \alpha_{i'} \mathbf{n}_{p_i}(\vartheta, \varphi) \times \mathbf{m}_{p_{i'}}(\vartheta, \varphi) \right\} \end{aligned} \quad (4.4.14)$$

¹³Im Fernfeld ist die Rotation, bis auf einen Faktor, durch eine Kreuzmultiplikation mit $\mathbf{e}_r$ zu ersetzen. Zur Berechnung der magnetischen Feldstärke kann deshalb auch die Beziehung 3.1.20 herangezogen werden.

Um die gesamte abgestrahlte Leistung P zu erhalten, muß man diesen Ausdruck über die Fernkugeloberfläche integrieren:

$$P = \int_0^{2\pi} \int_0^{\vartheta_0} \bar{\mathbf{S}} \cdot \mathbf{e}_r r^2 s_\vartheta s_\varphi d\vartheta d\varphi \quad (4.4.15)$$

Setzt man nun die Reihendarstellung von $\bar{\mathbf{S}}$ in dieses Integral ein und vertauscht dann Summation und Integration, so wird man auf Integrale des Typs

$$I_{ii'} := \int_0^{2\pi} \int_0^{\vartheta_0} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{n}_{p_i}(\vartheta, \varphi) \times \mathbf{m}_{p_i}(\vartheta, \varphi) s_\vartheta s_\varphi d\vartheta d\varphi \quad (4.4.16)$$

geführt. Nach Gl. 3.1.15 und 3.1.18 ergibt sich für diese Integrale

$$\begin{aligned} I_{ii'} &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\vartheta_0} \left[\frac{1}{s_\varphi^2} \frac{\partial Y_{p_i}}{\partial \varphi} \frac{\partial Y_{p_{i'}}}{\partial \varphi} + \frac{1}{s_\vartheta^2} \frac{\partial Y_{p_i}}{\partial \vartheta} \frac{\partial Y_{p_{i'}}}{\partial \vartheta} \right] s_\vartheta s_\varphi d\vartheta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\vartheta_0} \left[\frac{s_\vartheta}{s_\varphi} \frac{\partial Y_{p_i}}{\partial \varphi} \frac{\partial Y_{p_{i'}}}{\partial \varphi} + \frac{s_\varphi}{s_\vartheta} \frac{\partial Y_{p_i}}{\partial \vartheta} \frac{\partial Y_{p_{i'}}}{\partial \vartheta} \right] d\vartheta d\varphi \end{aligned}$$

Durch partielle Integration und Berücksichtigung der Periodizität, der Randbedingung und der Differentialgleichung der Y_{p_i} findet man (29, Anhang 4)

$$I_{ii'} = p_i(p_i + 1) \int_0^{2\pi} \int_0^{\vartheta_0} Y_{p_i}(\vartheta) Y_{p_{i'}}(\vartheta, \varphi) s_\vartheta s_\varphi d\vartheta d\varphi$$

Dies ist aber bis auf einen Vorfaktor das Orthogonalitätsintegral der Y_{p_i} , so daß nach Gl. 3.2.12 gilt

$$I_{ii'} = p_i(p_i + 1) \delta_{ii'}$$

Für die abgestrahlte Leistung findet man somit

$$P = \frac{1}{2} \Re \left\{ \frac{4\pi^2 r_0^2 \kappa^3 V_0^2}{\omega \mu} (1 - k^2 \cos^2 \vartheta_0) \sum_i |\alpha_i|^2 p_i(p_i + 1) \right\} \quad (4.4.17)$$

Da alle Größen in der geschweiften Klammer in Gl. 4.4.17 reell sind, kann die Realteilbildung auch weggelassen werden. Berücksichtigt man zudem, daß

$$\kappa = \omega \sqrt{\epsilon \mu}$$

ist und führt den Wellenwiderstand des freien Raumes

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}}$$

ein, dann erhält man den Ausdruck

$$P = 2\pi^2 \kappa^2 r_0^2 \frac{V_0^2}{Z_0} (1 - k^2 \cos^2 \vartheta_0) \sum_i [\alpha_i]^2 p_i (p_i + 1) \quad (4.4.18)$$

Um eine normierte Größe zu erhalten, führt man den Strahlungswiderstand R_s ein, der implizit durch

$$P = \frac{1}{2} \frac{V_0^2}{R_s} \quad (4.4.19)$$

definiert ist, und findet für diesen

$$\frac{Z_0}{R_s} = 4\pi^2 \kappa^2 r_0^2 (1 - k^2 \cos^2 \vartheta_0) \sum_i [\alpha_i]^2 p_i (p_i + 1) \quad (4.4.20)$$

Diese Größe ist für verschiedene elliptische Kegel und Sektoren in Abb. 4.4.8 und 4.4.9 über dem relativen Schlitzabstand r_0/λ_0 aufgetragen. Man sieht, daß die abgestrahlte Leistung zunächst mit dem Schlitzabstand rasch anwächst, um dann in dem Resonanzbereich zu oszillieren. Eine Angabe des Strahlungswiderstandes für größere Schlitzabstände wäre nicht mehr realistisch, da dann eine konstante Aperturbelegung über den gesamten Schlitz nur schwer realisiert werden kann.

Wir haben in diesem Abschnitt die Methode der dyadischen Greenschen Funktion zur Berechnung des Feldes einer Aperturantenne mit elliptischer Kegelgeometrie benutzt. Dabei wurde nur der Anteil des Flächenintegrals in der allgemeinen Darstellung des Feldes nach Gl. 3.3.8 benötigt. Wir werden nun in dem nächsten Abschnitt das Randwertproblem der Beugung einer ebenen Welle an dem elliptischen Kegel behandeln, wobei sich zeigt, daß letztlich die hier verwendete Methode auch zur Lösung dieses Beugungsproblems herangezogen werden kann.

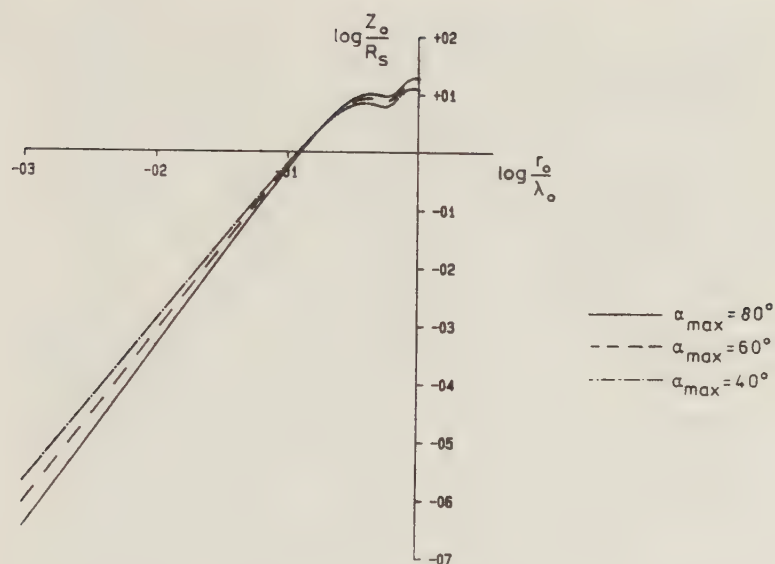


Abbildung 4.4.8: Strahlungsadmittanz eines schlitgespeisten Kegels
 $\alpha_{min} = 30^\circ$
als Funktion des Schlitzabstandes

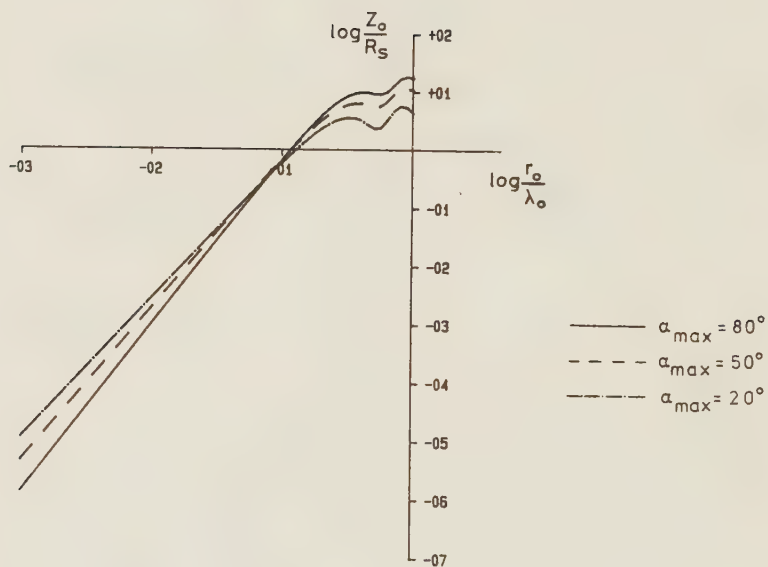


Abbildung 4.4.9: Strahlungsadmittanz eines schlitzgespeisten Sektors als Funktion des Schlitzabstandes

5 Untersuchungen zur Beugung einer ebenen, elektromagnetischen Welle an einem elliptischen Kegel

Bei der Untersuchung von Beugungsphänomenen kann man in vielen Fällen davon ausgehen, daß die felderzeugenden Ströme sehr weit von dem beugenden Objekt entfernt sind. In diesem Fall können die Phasenfronten der einfallenden Welle in der Umgebung des Streukörpers als eben angenommen werden. Das Problem der Beugung einer ebenen Welle an einem Streukörper spielt daher in der Beugungstheorie eine zentrale Rolle.

Speziell wollen wir uns hier mit dem Problem der Beugung einer ebenen Welle an einem metallischen Kegel elliptischen Querschnitts befassen. Dabei werden wir zunächst unter Verwendung der in den vorangegangenen Kapiteln vorgestellten Methoden eine strenge Lösung des Beugungsproblems ableiten, die für den Spezialfall des rotationssymmetrischen Kegels zu einem bekannten Ausdruck für den Radarrückstreuquerschnitt dieses Streuobjektes führt.

Da die Spezialisierung auf den rotationssymmetrischen Fall Hinweise für die anzuwendende Methodik bei der Auswertung des allgemeineren Ausdruckes liefert, werden wir diese in Kap. 5.2 vorstellen.

Aus den so gefundenen Eigenschaften der Lösung läßt sich eine Methode entwickeln, mit der der Radarrückstreuquerschnitt des semi-infiniten elliptischen Kegels zumindest für kleine Kegelöffnungswinkel berechnet werden kann. Die Ergebnisse dieser Rechnung werden wir mit der physikalisch optischen Näherung vergleichen, die in einem weiteren Kapitel behandelt wird.

In dem letzten Abschnitt stellen wir Überlegungen zur Theorie der Beugung an einem elliptischen Kegel endlicher Länge vor. Bei der Lösung dieses Problems stellt sich heraus, daß die hier verwendete Methode der Modenanpassung aufgrund der zusätzlichen Kantensingularität einen Ausdruck für das Feld liefert, der nur für Kegel sehr kleiner Länge ausgewertet werden kann.

5.1 Herleitung einer strengen Lösung des Beugungsproblem

Die Geometrie des Beugungsproblem ist in Abb. 5.1.1 skizziert. Die Ausbreitungsrichtung der einfallenden ebenen Welle werde durch den Einheits-

vektor $\mathbf{e}_\kappa$ beschrieben und die Polarisation der elektrischen Feldstärke durch den Einheitsvektor $\mathbf{p}$.

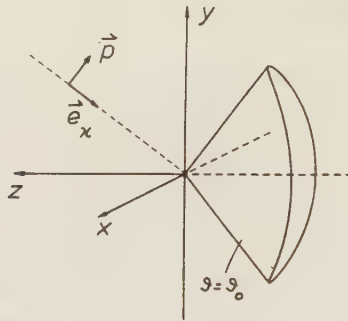


Abbildung 5.1.1: *Geometrie der Beugungsanordnung*

Die elektrische Feldstärke der einfallenden Welle ist dann gegeben durch

$$\begin{aligned}\mathbf{E}^i(\mathbf{r}) &= E_0 \mathbf{p} \exp(-j\kappa \mathbf{e}_\kappa \cdot \mathbf{r}) \\ &= E_0 \mathbf{p} \exp(-j\kappa r \mathbf{e}_\kappa \cdot \mathbf{e}_r)\end{aligned}\quad (5.1.1)$$

Das sich einstellende Gesamtfeld $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ schreiben wir als Summe über das ungestört einfallende Feld $\mathbf{E}^i(\mathbf{r})$ und ein von dem Kegel erzeugtes Streufeld $\mathbf{E}^s(\mathbf{r})$.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) + \mathbf{E}^s(\mathbf{r}) \quad (5.1.2)$$

Das Gesamtfeld genügt zum einen den quellenfreien Maxwellschen Gleichungen und zum anderen der Randbedingung

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \quad (5.1.3)$$

auf dem Kegelmantel. Aus dieser Randbedingung folgt sofort eine Randbedingung für das zu bestimmende Streufeld, nämlich

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E}^s(\mathbf{r}) = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) \quad \forall \mathbf{r} \in M. \quad (5.1.4)$$

Da das Streufeld selbst den quellenfreien Maxwellschen Gleichungen genügen muß, kann es nach Kap. 3.3 als Integral

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{r}) = \frac{-1}{j\omega\mu} \iint_M [\mathbf{n}' \times \mathbf{E}^i(\mathbf{r}')] \cdot \underline{\underline{\Gamma}}_e(\mathbf{r}'; \mathbf{r}) d\mathbf{f}' \quad (5.1.5)$$

angegeben werden. Das Integrationsgebiet M ist dabei der gesamte Kegelmantel $\vartheta = \vartheta_0$.

In dieser Integraldarstellung sind die Beiträge, die von der Integration über die Fernkugel herrühren, nicht berücksichtigt. Diese können allerdings nur dann vernachlässigt werden, wenn die Quellen des Feldes, hier die Randwerte, die die einfallende ebene Welle auf dem Kegelmantel erzeugt, für $r' \rightarrow \infty$ hinreichend schnell verschwinden. Diese Voraussetzung ist bei Vorgabe einer ungedämpften ebenen Welle als Feldanregung nicht erfüllt.

Wir nehmen deshalb zunächst an, daß das den Kegel umgebende Medium mit Verlusten behaftet ist, so daß die einfallende Welle längs ihrer Ausbreitungsrichtung exponentiell gedämpft wird. Damit dann auch die Randwerte des Feldes auf dem Kegelmantel für $r' \rightarrow \infty$ verschwinden, muß der Ausbreitungsvektor $\mathbf{e}_\kappa$ eine Komponente besitzen, die in die Richtung wachsender Abstandskoordinate r' auf dem Kegelmantel zeigt. Wie in Abb. 5.1.2 angedeutet, bildet $\mathbf{e}_\kappa$ dann mit dem Einheitsvektor $\mathbf{e}_{r'}$ in Richtung r' einen spitzen Winkel. Die ebene Welle darf also nur aus einer Richtung auf den Kegel einfallen, für die gilt

$$0 \leq \mathbf{e}_\kappa \cdot \mathbf{e}_{r'} \leq 1 \quad . \quad (5.1.6)$$

Schließlich bildet man den Grenzwert verschwindender Verluste und gelangt so zu der Integraldarstellung nach Gl. 5.1.5.

Die in dieser Integraldarstellung benötigten Tangentialkomponenten des einfallend Feldes auf dem Kegelmantel gewinnt man durch Skalarmultiplikation von Gl. 5.1.1 mit $\mathbf{e}_{r'}$ bzw. mit $\mathbf{e}_{\vartheta'}$. Für Aufpunkte im Fernfeld ($r \rightarrow \infty$)

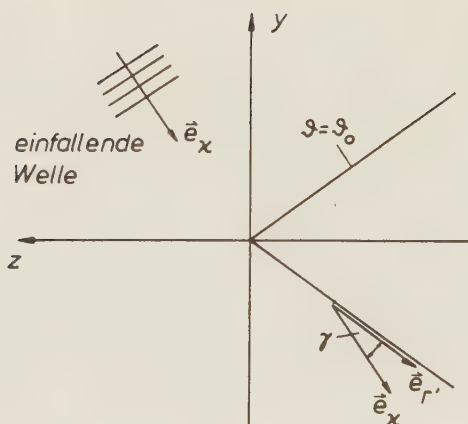


Abbildung 5.1.2: Zur Einschränkung der Ausbreitungsrichtung der ebenen Welle.
Der Winkel γ muß kleiner als 90° sein.

erhält man dann nach Gl. 4.4.6 die Felddarstellung

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_f^s(\mathbf{r}) = & \\
 & -j\kappa E_0 \sum_i \mathbf{M}_{q_i}^{(2)}(\mathbf{r}) \int_0^{2\pi} \int_0^\infty s_{\varphi'} Y_{q_i}(\vartheta_0, \varphi') (\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_{r'}) j_{q_i}(\kappa r') e^{-j\kappa a r'} dr' d\varphi' \\
 & + j\kappa E_0 \sum_i \frac{\mathbf{M}_{q_i}^{(2)}(\mathbf{r})}{q_i(q_i + 1)} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{\partial Y_{q_i}}{\partial \varphi'} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_{r'}) \frac{d}{dr'} [r' j_{q_i}(\kappa r')] e^{-j\kappa a r'} dr' d\varphi' \\
 & - j\kappa^2 E_0 \sum_i \frac{\mathbf{N}_{p_i}^{(2)}(\mathbf{r})}{p_i(p_i + 1)} \int_0^{2\pi} \int_0^\infty \frac{s_{\varphi'}}{s_{\vartheta'}} \frac{\partial Y_{p_i}}{\partial \vartheta'} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_{r'}) r' j_{p_i}(\kappa r') e^{-j\kappa a r'} dr' d\varphi'
 \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

mit

$$a = \mathbf{e}_\kappa \cdot \mathbf{e}_{r'}, \quad 0 \leq a \leq 1$$

Die Integrale in dieser Felddarstellung hängen nicht von dem Aufpunkt $\mathbf{r}$ ab, und stellen somit die Koeffizienten der Feldentwicklung dar. Sie könnten nun numerisch berechnet werden, so daß mit Gl. 5.1.7 bereits eine Lösung des Randwertproblems vorliegt. Es erweist sich allerdings als notwendig die Integration über r' geschlossen durchzuführen, da das unendliche Integrationsintervall und der oszillierende Integrand eine numerische Quadratur ausschließen. Diese Rechnung ist in Anhang 5 ausführlich dargestellt. An dieser Stelle wollen wir lediglich das Ergebnis und die daraus resultierende Felddarstellung angeben.

In der ersten Summe in Gl. 5.1.7 ist das Integral

$$I_{r_1} := \int_0^\infty j_{q_i}(\kappa r') e^{-j\kappa a r'} dr'$$

zu berechnen. Mit Gl. A5.8 gilt

$$I_{r_1} = \frac{\pi}{2j\kappa} \frac{1}{\sin q_i \pi} \left\{ e^{jq_i \pi/2} P_{q_i}(a) - e^{-jq_i \pi/2} P_{q_i}(-a) \right\} \tag{5.1.8}$$

$P_\nu(u)$ ist hier die Legendrefunktion 1. Art der Ordnung ν .
Für das Integral in der zweiten Summe

$$I_{r_2} := \int_0^\infty \frac{d}{dr'} [r' j_{q_i}(\kappa r')] e^{-j\kappa ar'} dr'$$

findet man durch partielle Integration und mit Gl. A5.13

$$\begin{aligned} I_{r_2} &= r' j_{q_i}(\kappa r') e^{-j\kappa ar'} \Big|_0^\infty + j\kappa a \int_0^\infty r' j_{q_i}(\kappa r') e^{-j\kappa ar'} dr' \\ &= \frac{\pi}{2j\kappa} \frac{1}{\sin q_i \pi} \frac{a}{\sqrt{1-a^2}} \left\{ e^{jq_i \pi/2} P_{q_i}^1(a) + e^{-jq_i \pi/2} P_{q_i}^1(-a) \right\} \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

Der ausintegrierte Term bei der partiellen Integration kann hier deshalb zu Null gesetzt werden, da wir zunächst von einem verlustbehafteten Medium ausgehen, in dem κ einen negativen Imaginärteil besitzt.

Schließlich erhält man für das Integral in der dritten Summe mit Gl. A5.13

$$\begin{aligned} I_{r_3} &:= \int_0^\infty r' j_{p_i}(\kappa r') e^{-j\kappa ar'} dr' \\ &= \frac{-\pi}{2\kappa^2} \frac{1}{\sin p_i \pi} \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \left\{ e^{jp_i \pi/2} P_{p_i}^1(a) + e^{-jp_i \pi/2} P_{p_i}^1(-a) \right\} \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

Zur Vereinfachung setzt man nun in der ersten Summe in Gl. 5.1.7 noch (s. Gl. 2.2.1)

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_{\varphi'} = \mathbf{p} \cdot \frac{1}{s_{\varphi'}} \frac{\partial \mathbf{e}_{r'}}{\partial \varphi'} = \frac{1}{s_{\varphi'}} \frac{\partial \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_{r'}}{\partial \varphi'}$$

und faßt die ersten beiden Summen in der Felddarstellung zusammen. Desweiteren setzt man für $\mathbf{M}_{q_i}$ sowie $\mathbf{N}_{p_i}$ die entsprechenden Fernfeldnäherungen (vgl. Kap. 4.2)

$$\mathbf{M}_{q_i} \rightarrow \mathbf{m}_{q_i}(\vartheta, \varphi) j^{q_i+1} \frac{e^{-j\kappa r}}{\kappa r}$$

und

$$\mathbf{N}_{\mathbf{p}_i} \rightarrow -\mathbf{n}_{\mathbf{p}_i}(\vartheta, \varphi) j^{p_i} \frac{e^{-j\kappa r}}{\kappa r}$$

ein und erhält schließlich

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_f^s(\mathbf{r}) = & +jE_0 \frac{\pi}{2} \frac{e^{-j\kappa r}}{\kappa r} \sum_i \frac{j^{q_i}}{q_i(q_i+1)} \frac{\Theta_{q_i}(\vartheta_0)}{\sin q_i \pi} \left[U_{q_i}(-a)e^{-jq_i\pi/2} - U_{q_i}(a)e^{jq_i\pi/2} \right] \mathbf{m}_{q_i}(\vartheta, \varphi) \\ & -jE_0 \frac{\pi}{2} \frac{e^{-j\kappa r}}{\kappa r} \sum_i \frac{j^{p_i}}{p_i(p_i+1)} \frac{\left. \frac{d\Theta_{p_i}}{d\vartheta'} \right|_{\vartheta_0}}{\sin q_i \pi} \left[V_{p_i}(-a)e^{-jp_i\pi/2} + V_{p_i}(a)e^{jp_i\pi/2} \right] \mathbf{n}_{p_i}(\vartheta, \varphi) \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

mit¹⁴

$$U_{q_i}(u) := \int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial \mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_{r'}}{\partial \varphi'} \Phi_{q_i}(\varphi') q_i(q_i+1) P_{q_i}(u) - (\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_{r'}) \frac{\partial \Phi_{q_i}(\varphi')}{\partial \varphi'} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} P_{q_i}'(u) \right] d\varphi' \quad (5.1.12)$$

und

$$V_{p_i}(u) := \int_0^{2\pi} (\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_{r'}) \frac{s_{\varphi'}}{s_{\vartheta'}} \Phi_{p_i}(\varphi') \frac{P_{p_i}'(u)}{\sqrt{1-u^2}} d\varphi' \quad (5.1.13)$$

Die verbleibenden Integrale hängen nicht mehr von der Wellenlänge ab und können damit weitgehend problemlos numerisch bestimmt werden.

Spezialisiert man diese Felddarstellung auf den Fall des rotationssymmetrischen Kegels und paraxialen Einfall der ebenen Welle ($\mathbf{e}_\kappa = -\mathbf{e}_z$), so erhält man einen Ausdruck, der in [43] auf einem völlig anderen Weg hergeleitet

¹⁴Diese Schreibweise ist in gewisser Hinsicht ungenau, da $u = \pm a = \pm \mathbf{e}_\kappa \cdot \mathbf{e}_{r'}$ noch von der Integrationsvariablen abhängt. Sie ist aber eindeutig, wenn sie so verstanden wird, daß zunächst die Variable u zu ersetzen, und dann erst die Integration auszuführen ist.

wird. Da bei dieser Spezialisierung einige für die numerische Auswertung wichtige Eigenschaften der Felddarstellung deutlich werden, wollen wir hierauf in dem folgenden Abschnitt näher eingehen.

5.2 Zur Beugung einer paraxial einfallenden ebenen Welle an einem Kreiskegel

Nehmen wir speziell den Fall an, daß die einfallende ebene Welle sich in negativer z -Richtung ausbreitet und in x -Richtung polarisiert ist (Abb. 5.2.1). Sie werde durch einen metallischen Kreiskegel mit dem Halböffnungswinkel $\pi - \vartheta_0$ gestreut, der um die negative z -Achse geschlossen ist.

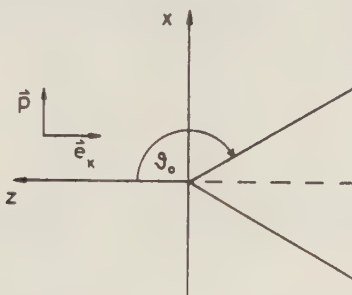


Abbildung 5.2.1: *Beugung einer ebenen Welle an einem Kreiskegel*

Das Streuobjekt kann als Spezialfall eines elliptischen Kegels für $k^2 = 1$ (Kap. 2.1) aufgefaßt werden, so daß die in Kap. 5.1 hergeleitete Lösungstheorie auch in dem vorliegenden Fall angewendet werden kann. Wie in Anhang 2 ausgeführt, gehen die Laméschen Funktionen für diesen Spezialfall stetig in die Kugelflächenfunktionen über, so daß man für die Lösungsfunktionen Y_ν des Randwertproblems ansetzen kann

$$Y_\nu(\bar{\vartheta}, \bar{\varphi}) = \frac{1}{\Lambda_\nu} \frac{\sin m\bar{\varphi}}{\cos m\bar{\varphi}} P_\nu^m(\cos \bar{\vartheta}) \quad (5.2.1)$$

mit

$$\Lambda_\nu = \left\{ \int_0^{2\pi} \int_0^{\vartheta_0} \left[\frac{\sin m\bar{\varphi}}{\cos m\bar{\varphi}} P_\nu^m(\cos \bar{\vartheta}) \right]^2 \sin \bar{\vartheta} d\bar{\vartheta} d\bar{\varphi} \right\}^{1/2}. \quad (5.2.2)$$

Die trigonometrischen Funktionen $\sin m\bar{\varphi}$ bzw. $\cos m\bar{\varphi}$ sind hier mit den periodischen Funktionen $\Phi_\nu(\bar{\varphi})$ zu identifizieren und die zugeordneten Legendrefunktionen $P_\nu^m(\cos \bar{\vartheta})$ mit den nicht-periodischen Funktionen $\Theta_\nu(\bar{\vartheta})$ (vgl. Kap. 3.2). Das Normierungsintegral Λ_ν ordnet man dabei zweckmäßig entweder der periodischen oder der nicht-periodischen Funktion zu. Wir haben uns hier für die erste Möglichkeit entschieden.

Zudem haben wir in Gl. 5.2.2 für die Ortsvariablen Kugelkoordinaten $\bar{\vartheta}$ und $\bar{\varphi}$ eingesetzt, um deutlich zu machen, daß es sich hier lediglich um einen Spezialfall der allgemeinen Lösung des Randwertproblems handelt.

Für die Skalarprodukte, die in der Felddarstellung nach Gl. 5.1.11 einzusetzen sind, findet man hier (s. Tab. 2.2.1)

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_{r'} = \sin \vartheta_0 \cos \bar{\varphi}' \quad (5.2.3)$$

und

$$a = \mathbf{e}_\kappa \cdot \mathbf{e}_{r'} = -\cos \vartheta_0 \quad (5.2.4)$$

Zudem ist hier, da $k^2 = 1$, in den Koeffizientenintegralen für die Skalierungsfaktoren

$$s_\vartheta = 1 \quad \text{und} \quad s_\varphi|_{\vartheta_0} = \sin \vartheta_0$$

einzusetzen.

Man sieht, daß in dem betrachteten Fall das Argument der Legendrefunktionen $u = \pm a = \pm \mathbf{e}_\kappa \cdot \mathbf{e}_{r'}$ in den Koeffizientenintegralen (Gl. 5.1.12, 5.1.13) nicht mehr von der Integrationsvariablen $\bar{\varphi}'$ abhängt. Es ist dann lediglich über Produkte aus trigonometrischen Funktionen zu integrieren. Aus den Orthogonalitätseigenschaften dieser Funktionen folgt dann, daß die Koeffizienten der Feldentwicklung nur für Lösungsfunktionen mit $m = 1$ von Null verschieden sind. Im einzelnen erhält man

$$Y_{q_1}(\bar{\vartheta}, \bar{\varphi}) = \sin \bar{\varphi} P_{q_1}^1(\cos \bar{\vartheta}) \quad (5.2.5)$$

mit

$$\left. \frac{dP_{q_1}^1(\bar{\vartheta})}{d\bar{\vartheta}} \right|_{\vartheta_0} = 0 \quad (5.2.6)$$

und

$$Y_{p_1}(\bar{\vartheta}, \bar{\varphi}) = \cos \bar{\varphi} P_{p_1}^1(\cos \bar{\vartheta}) \quad (5.2.7)$$

mit

$$P_{p_1}^1(\cos \vartheta_0) = 0 \quad (5.2.8)$$

Oder anders ausgedrückt, die Lösungsfunktionen zur Dirichlet- Bedingung sind Funktionen des Typs *IV* und diejenigen zur v. Neumann- Bedingung Funktionen des Typs *II*. Die Beschränkung auf $m = 1$ bedeutet, daß nur die Eigenwerte auf der jeweiligen 1. Eigenwertkurve zu der Lösung beitragen (s. Kap. 3.2 und Anh. 2).

In der Felddarstellung nach Gl. 5.1.11 und in den Koeffizientenintegralen in Gl. 5.1.12 und 5.1.13 sind dann die Ersetzungen

$$\begin{aligned}\Phi_{q_i}(\varphi) &= \frac{1}{\Lambda_{q_i}} \sin \bar{\varphi} \\ \Theta_{q_i}(\vartheta) &= P_{q_i}^1(\cos \bar{\vartheta}) \\ \Phi_{p_i}(\varphi) &= \frac{1}{\Lambda_{p_i}} \cos \bar{\varphi} \\ \Theta_{p_i}(\vartheta) &= P_{p_i}^1(\cos \bar{\vartheta})\end{aligned}$$

vorzunehmen.

Nach diesen Vorbetrachtungen kann man nun die Größen U_{q_i} und V_{p_i} berechnen. Nach Gl. 5.1.13 erhält man

$$V_{p_i}(-a) = V_{p_i}(\cos \vartheta_0) = 0 \quad , \quad (5.2.9)$$

aufgrund der Randbedingung 5.2.8.

Desweiteren gilt

$$\begin{aligned}V_{p_i}(a) &= \frac{1}{\Lambda_{p_i}} \sin \vartheta_0 P_{p_i}^1(-\cos \vartheta_0) \int_0^{2\pi} \cos^2 \bar{\varphi} d\bar{\varphi} \\ &= \frac{\pi}{\Lambda_{p_i}} \sin \vartheta_0 P_{p_i}^1(-\cos \vartheta_0) \quad .\end{aligned} \quad (5.2.10)$$

Für U_{q_i} findet man (Gl. 5.1.13)

$$\begin{aligned}
 U_{q_i}(u) &= - \frac{q_i(q_i+1)}{\Lambda_{q_i}} \sin \vartheta_0 P_{q_i}(u) \int_0^{2\pi} \sin^2 \bar{\varphi} d\bar{\varphi} \\
 &\quad - \frac{\sin \vartheta_0}{\Lambda_{q_i}} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} P_{q_i}^1(u) \int_0^{2\pi} \cos^2 \bar{\varphi} d\bar{\varphi} \\
 &= - \frac{\pi}{\Lambda_{q_i}} \sin \vartheta_0 \left[q_i(q_i+1) P_{q_i}(u) + \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} P_{q_i}^1(u) \right]
 \end{aligned} \tag{5.2.11}$$

Dieser Ausdruck kann mit Hilfe der Differentialgleichung der Legendrefunktionen

$$\frac{d}{du} \left[(1-u^2) \frac{dP_{q_i}}{du} \right] + q_i(q_i+1) P_{q_i}(u) = 0$$

und der Beziehung

$$\frac{dP_{q_i}(u)}{du} = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} P_{q_i}^1(u)$$

vereinfacht werden. Man findet so für $P_{q_i}(u)$ den Ausdruck

$$P_{q_i}(u) = \frac{1}{q_i(q_i+1)} \frac{d}{du} \left[\sqrt{1-u^2} P_{q_i}^1(u) \right],$$

der nun in Gl. 5.2.11 eingesetzt wird. Für U_{q_i} findet man damit

$$U_{q_i}(u) = - \frac{\pi}{\Lambda_{q_i}} \sin \vartheta_0 \sqrt{1-u^2} \frac{dP_{q_i}^1(u)}{du} \tag{5.2.12}$$

Durch Einsetzen von $u = \pm \cos \vartheta_0$ und damit

$$\frac{d}{du} = \mp \frac{1}{\sin \vartheta_0} \frac{d}{d\bar{\vartheta}} \Big|_{\vartheta_0}$$

ergibt sich schließlich

$$U_{q_i}(a) = - \frac{\pi}{\Lambda_{q_i}} \sin \vartheta_0 \frac{dP_{q_i}^1(-\cos \bar{\vartheta})}{d\bar{\vartheta}} \Big|_{\vartheta_0} \tag{5.2.13}$$

und

$$U_{q_i}(-a) = \frac{\pi}{\Lambda_{q_i}} \sin \vartheta_0 \frac{dP_{q_i}^1(\cos \bar{\vartheta})}{d\bar{\vartheta}} \Big|_{\vartheta_0} = 0, \quad (5.2.14)$$

aufgrund der Randbedingung 5.2.6.

Wie die Rechnung gezeigt hat, sind die Anteile $U_{q_i}(-a)$ und $V_{p_i}(-a)$ in den Koeffizientenintegralen identisch Null. Dies gilt auch in dem Fall des elliptischen Kegels, wo diese Eigenschaft allerdings nur für einen der beiden Terme bewiesen werden kann (s. Kap. 5.3).

Setzt man nun $U_{q_i}(a)$ und $V_{p_i}(a)$ nach Gl. 5.2.13 bzw. 5.2.10 in der Felddarstellung nach Gl. 5.1.11 ein, so erhält man

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_f' = j E_0 \frac{\pi}{2} \frac{e^{-j\kappa r}}{\kappa r} \times \\ \left\{ \sum_i \frac{j^{q_i} P_{q_i}^1(\cos \vartheta_0)}{q_i(q_i + 1) \sin q_i \pi} \frac{\pi \sin \vartheta_0}{\Lambda_{q_i}} \frac{dP_{q_i}^1(-\cos \bar{\vartheta})}{d\bar{\vartheta}} \Big|_{\vartheta_0} e^{j q_i \pi/2} \mathbf{m}_{q_i}(\bar{\vartheta}, \bar{\varphi}) \right. \\ \left. - \sum_i \frac{j^{p_i} \frac{dP_{p_i}^1(\cos \bar{\vartheta})}{d\bar{\vartheta}}}{p_i(p_i + 1) \sin p_i \pi} \frac{\vartheta_0}{\Lambda_{p_i}} \frac{\pi \sin \vartheta_0}{\Lambda_{p_i}} P_{p_i}^1(-\cos \vartheta_0) e^{j p_i \pi/2} \mathbf{n}_{p_i}(\bar{\vartheta}, \bar{\varphi}) \right\}. \end{aligned} \quad (5.2.15)$$

In diesem Ausdruck kann man nun noch wesentliche Vereinfachungen vornehmen, wenn man die Wronskische Determinante der Funktionen $P_\nu^1(\cos \bar{\vartheta})$ und $P_\nu^1(-\cos \bar{\vartheta})$ benutzt. Für diese gilt ([21, S. 692])

$$P_\nu^1(\cos \bar{\vartheta}) \frac{dP_\nu^1(-\cos \bar{\vartheta})}{d\bar{\vartheta}} - P_\nu^1(-\cos \bar{\vartheta}) \frac{dP_\nu^1(\cos \bar{\vartheta})}{d\bar{\vartheta}} = -\frac{2 \sin \nu \pi}{\pi \sin \bar{\vartheta}} \nu(\nu - 1). \quad (5.2.16)$$

Betrachtet man Gl. 5.2.16 an der Stelle $\bar{\vartheta} = \vartheta_0$ und setzt für ν zum einen den Eigenwert q_i zur v. Neumann-Bedingung und zum anderen den Eigenwerte p_i zur Dirichlet-Bedingung ein, so erhält man, unter Ausnutzung der Randbedingungen 5.2.6 und 5.2.8

$$P_{p_i}^1(-\cos \vartheta_0) \frac{dP_{p_i}^1(\cos \bar{\vartheta})}{d\bar{\vartheta}} \Big|_{\vartheta_0} = \frac{2 \sin p_i \pi}{\pi \sin \vartheta_0} p_i(p_i + 1) \quad (5.2.17)$$

und

$$P_{q_i}^1(\cos \vartheta_0) \frac{dP_{q_i}^1(-\cos \bar{\vartheta})}{d\bar{\vartheta}} \Big|_{\vartheta_0} = -\frac{2 \sin q_i \pi}{\pi \sin \vartheta_0} q_i(q_i + 1) \quad (5.2.18)$$

Damit ergibt sich schließlich für das Streufeld des Kreiskegels

$$\mathbf{E}_f'(\mathbf{r}) = -jE_0\pi \frac{e^{-j\kappa r}}{\kappa r} \left\{ \sum_i \frac{e^{jq_i\pi}}{\Lambda_{q_i}} \mathbf{m}_{q_i}(\bar{\vartheta}, \bar{\varphi}) + \sum_i \frac{e^{jp_i\pi}}{\Lambda_{p_i}} \mathbf{n}_{p_i}(\bar{\vartheta}, \bar{\varphi}) \right\} \quad (5.2.19)$$

wobei hier noch die Beziehung $j^\nu = \exp(j\nu\pi/2)$ eingesetzt worden ist.

Die so gewonnene Darstellung des Streufeldes wird in [43] auf einem völlig anderen Weg hergeleitet. Die dort benutzte Methode kann allerdings nicht auf beliebige Einfallrichtungen der ebenen Welle und schon gar nicht auf den Fall des elliptischen Kegels erweitert werden, so daß man mit dem hier vorgestellten Verfahren im Prinzip einen viel größeren Problemkreis abdeckt. Es ergeben sich aber nur für den in diesem Abschnitt betrachteten Spezialfall derart einfache Ausdrücke für die Koeffizienten der Streufeldentwicklung. Im allgemeineren Fall des elliptischen Kegels müssen z.B. die Koeffizienten durch numerische Berechnung der Koeffizientenintegrale in Gl. 5.1.12 und 5.2.13 bestimmt werden. Bevor wir aber diesen Fall näher betrachten, wollen wir noch aus der Streufeldentwicklung nach Gl. 5.2.19 den Radarrückstreuquerschnitt des Kreiskegels berechnen und ein Verfahren vorstellen, mit dem die in diesem Ausdruck auftretenden, schlecht konvergierenden Summen ausgewertet werden können.

Dazu benötigt man das Streufeld in Rückstreurichtung, also für $\bar{\vartheta} = 0$. Nach Gl. 3.1.15 und 3.1.18 findet man

$$\mathbf{m}_{q_i}(\bar{\vartheta}, \bar{\varphi}) = -\frac{\cos \bar{\varphi}}{\Lambda_{q_i}} \frac{P_{q_i}^1(\cos \bar{\vartheta})}{\sin \bar{\vartheta}} \mathbf{e}_{\bar{\vartheta}} + \frac{\sin \bar{\varphi}}{\Lambda_{p_i}} \frac{dP_{p_i}^1(\cos \bar{\vartheta})}{d\bar{\vartheta}} \mathbf{e}_{\bar{\varphi}} \quad (5.2.20)$$

und

$$\mathbf{n}_{p_i}(\bar{\vartheta}, \bar{\varphi}) = \frac{\cos \bar{\varphi}}{\Lambda_{p_i}} \frac{dP_{p_i}^1(\cos \bar{\vartheta})}{d\bar{\vartheta}} \mathbf{e}_{\bar{\vartheta}} - \frac{\sin \bar{\varphi}}{\Lambda_{q_i}} \frac{P_{q_i}^1(\cos \bar{\vartheta})}{\sin \bar{\vartheta}} \mathbf{e}_{\bar{\varphi}} \quad (5.2.21)$$

Im Grenzfall $\bar{\vartheta} \rightarrow 0$ findet man mit Hilfe der Differentialgleichung der Legendrefunktionen

$$\lim_{\bar{\vartheta} \rightarrow 0} \frac{P_\nu^1(\cos \bar{\vartheta})}{\sin \bar{\vartheta}} = \lim_{\bar{\vartheta} \rightarrow 0} \frac{dP_\nu^1(\cos \bar{\vartheta})}{d \cos \bar{\vartheta}} = -\frac{\nu(\nu + 1)}{2} \quad ,$$

so daß

$$\mathbf{m}_{q_i}(0, \bar{\vartheta}) = \frac{q_i(q_i + 1)}{2\Lambda_{q_i}} (\cos \bar{\vartheta} \mathbf{e}_{\bar{\vartheta}} - \sin \bar{\vartheta} \mathbf{e}_{\bar{\varphi}})$$

und

$$\mathbf{n}_{p_i}(0, \bar{\varphi}) = -\frac{p_i(p_i + 1)}{2\Lambda_{p_i}} (\cos \bar{\varphi} \mathbf{e}_{\bar{\vartheta}} - \sin \bar{\varphi} \mathbf{e}_{\bar{\varphi}})$$

Zudem gilt für $\bar{\vartheta} = 0$

$$\mathbf{e}_x = \cos \bar{\varphi} \mathbf{e}_{\bar{\vartheta}} - \sin \bar{\varphi} \mathbf{e}_{\bar{\varphi}},$$

so daß man schließlich für das Feld in Rückstreurichtung (+z- Richtung) den Ausdruck

$$\mathbf{E}'_f = -jE_0 \frac{\pi}{2} \frac{e^{-j\kappa r}}{\kappa r} \left\{ \sum_i \frac{q_i(q_i + 1) e^{jq_i \pi}}{\Lambda_{q_i}^2} - \sum_i \frac{p_i(p_i + 1) e^{jp_i \pi}}{\Lambda_{p_i}^2} \right\} \quad (5.2.22)$$

findet.

Eine technisch interessante Größe, die aus diesem Ausdruck berechnet werden kann, ist der Radarrückstreuquerschnitt σ , der ein Maß für die relative, zurückgestreute Leistung darstellt. Er kann hier mit Hilfe von

$$\sigma = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \frac{|\mathbf{E}'_f|^2}{|\mathbf{E}|^2} \quad (5.2.23)$$

berechnet werden.

Mit Gl. 5.2.22 findet man

$$\sigma = \lambda_0^2 \frac{\pi}{4} \left| \sum_i \frac{q_i(q_i + 1) e^{jq_i \pi}}{\Lambda_{q_i}^2} - \sum_i \frac{p_i(p_i + 1) e^{jp_i \pi}}{\Lambda_{p_i}^2} \right|^2 \quad (5.2.24)$$

mit

$$\Lambda_\nu^2 = \pi^2 \int_0^{\vartheta_0} [P_\nu^1(\cos \bar{\vartheta})]^2 \sin \bar{\vartheta} d\bar{\vartheta}.$$

Auswertungen dieses Ausdruckes für den Radarrückstreuquerschnitt eines Kreiskegels sind von Siegel, u.a. in [57] vorgestellt worden. Dort wird wegen der schlechten Konvergenz der Reihen eine spezielle Summationstechnik verwendet, die auch in dem allgemeineren Fall des elliptischen Kegels angewendet werden kann. Wir wollen diese Technik daher kurz beschreiben.

Sei eine Reihe der Form

$$v = \sum_{i=1}^{\infty} v_i$$

vorgegeben. Diese Reihe kann mit einem Parameter $y \neq 1$ auch als

$$v = \frac{1}{1-y} \left[v_1 + \sum_{i=1}^{\infty} (v_{i+1} - yv_i) \right] \quad (5.2.25)$$

geschrieben werden.

Bei geeigneter Wahl von y konvergiert diese Darstellung besser als die ursprüngliche. Eine noch besser konvergierende Darstellung von v erhält man, wenn man die unendliche Reihe in Gl. 5.2.25 noch einmal transformiert und v dann als

$$v = \frac{1}{1-y} \left\{ v_1 + \frac{1}{1-y} \left[v_2 - yv_1 + \sum_{i=1}^{\infty} (v_{i+2} - yv_{i+1} - yv_{i+1} + y^2v_i) \right] \right\} \quad (5.2.26)$$

schreibt. Auch die hier auftretende Summe kann man wieder transformieren und man erhält schließlich nach N Transformationen den Ausdruck ¹⁵

$$v = \sum_{i=0}^{N-1} \left(\frac{y}{1-y} \right)^{i+1} \Delta^i \left(\frac{v_n}{y^n} \right)_{n=1} + \left(\frac{y}{1-y} \right)^N \sum_{i=1}^{\infty} y^i \Delta^N \left(\frac{v_n}{y^n} \right)_{n=1}, \quad (5.2.27)$$

dessen Gültigkeit man leicht durch einen Induktionsschluß von N auf $N+1$ zeigen kann.

Der Operator Δ in diesem Ausdruck ist einfach der Differenzoperator. Für die Potenzen von Δ gilt

$$\begin{aligned} \Delta^0 u_i &= u_i \\ \Delta^1 u_i &= u_{i+1} - u_i \\ \Delta^2 u_i &= (u_{i+2} - u_{i+1}) - (u_{i+1} - u_i) = u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i \\ &\dots \end{aligned}$$

Eine optimale Konvergenz des Verfahrens erreicht man, wenn der Parameter y zu

$$y = \exp(j \frac{\pi^2}{\vartheta_0}) \quad (5.2.28)$$

¹⁵In [57] liegt hier offensichtlich ein Druckfehler vor.

gewählt wird ([57]). Dies liegt letztlich daran, daß die Differenz zweier benachbarter Eigenwerte p_i bzw. q_i für große i gegen π/ϑ_0 geht. Da dies auch bei dem elliptischen Kegel der Fall ist (Anhang 2), kann man erwarten, daß die beschriebene Summationstechnik zumindest auch dann angewendet werden kann, wenn die Differenz zwischen den beiden extremen Öffnungswinkeln des Kegels nicht zu groß wird. Es sei noch erwähnt, daß für den Fall des Kreiskegels die Imaginärteile der beiden Summen in Gl. 5.2.24 identisch verschwinden ([57]). In dem allgemeineren Fall des elliptischen Kegels, ist dies allerdings nicht der Fall.

5.3 Berechnung des Radarrückstreuquerschnittes eines semi-infiniten Kegels elliptischen Querschnitts

Wir wollen nun den in Kap. 5.2 behandelten Spezialfall des Kreiskegels auf den allgemeineren Fall eines elliptischen Kegels erweitern. Wir nehmen also an, daß auf den Kegel eine in negative z -Richtung laufende ebene, elektromagnetische Welle einfällt, deren elektrischer Feldstärkevektor in x -Richtung polarisiert ist.

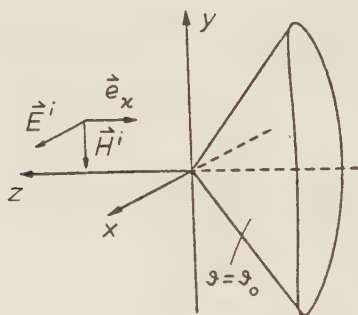


Abbildung 5.3.1: Zur Geometrie des Streuproblems

Bei der Berechnung des Streufeldes gehen wir von der Felddarstellung nach Gl. 5.1.11-5.1.13 aus und betrachten zunächst die Koeffizienten $U_{q_i}(u)$ und $V_{p_i}(u)$. In Kap. 5.2 haben wir für den Fall des rotationssymmetrischen Kegels geschlossene Ausdrücke für diese Koeffizientenintegrale bestimmt. Dabei hat sich gezeigt, daß die Koeffizienten $V_{p_i}(-a)$ und $U_{q_i}(-a)$ identisch verschwinden. In dem Fall des elliptischen Kegels können nun keine geschlossenen Ausdrücke für die Koeffizientenintegrale angegeben werden. Es stellt sich aber heraus, daß auch hier die Größen $V_{p_i}(-a)$ und $U_{q_i}(-a)$ verschwinden, was eine erhebliche Vereinfachung bei der numerischen Berechnung der Koeffizienten bedeutet.

Die Beziehung $V_{p_i}(-a) = 0$ kann auf analytischem Weg hergeleitet werden. Diesen Beweis stellen wir deshalb an den Anfang der Betrachtungen. Für die Beziehung $U_{q_i}(-a) = 0$ ist uns ein analytischer Nachweis nicht gelungen.

Umfangreiche numerische Untersuchungen haben diese Beziehung allerdings bestätigt, so daß wir in der Folge diesen Term in den Koeffizientenintegralen ebenfalls nicht berücksichtigen werden. Die verbleibenden nicht verschwindenden Koeffizientenintegrale haben wir durch direkte numerische Auswertung der Gln. 5.1.12 und 5.1.13 mit Hilfe des Gaußschen Integrationsverfahrens [71] bestimmt. Da es sich bei diesem Verfahren um ein Standardverfahren zur numerischen Integration handelt werden wir hier nicht näher darauf eingehen, sondern lediglich die mit dieser Rechnung erzielten Ergebnisse diskutieren.

Zuvor wollen wir aber noch, wie bereits erwähnt, zeigen, daß der Koeffizient $V_{p_i}(-a)$ auch im Fall des elliptischen Kegels identisch verschwindet. Dazu bestimmen wir zunächst die in den Koeffizientenintegralen einzusetzenden Geometrie Größen.

In den Integralen zur Bestimmung dieser Größen müssen bei der vorgegebenen Anregung die Skalarprodukte (vgl. Tab. 2.2.1)

$$\mathbf{p} \cdot \mathbf{e}_{r'} = \sin \vartheta_0 \cos \varphi' \quad (5.3.1)$$

und

$$a = \mathbf{e}_\kappa \cdot \mathbf{e}_{r'} = -\cos \vartheta_0 \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi'} \quad (5.3.2)$$

eingesetzt werden.

Nach Gl. 5.1.13 gilt dann

$$V_{p_i}(u) = \sin \vartheta_0 \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \vartheta_0} \int_{-\pi}^{2\pi} \frac{\cos \varphi' \Phi_{p_i}(\varphi')}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi'}} \frac{P_{p_i}^1(u)}{\sqrt{1 - u^2}} d\varphi' \quad (5.3.3)$$

mit

$$u = \pm \cos \vartheta_0 \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi'}$$

Wir betrachten nun die Funktion

$$f(\vartheta, \varphi) := \sin \vartheta \cos \varphi \frac{P_{p_i}^1(\cos \vartheta \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi})}{\sqrt{1 - \cos^2 \vartheta (1 - k'^2 \sin^2 \varphi)}} \quad (5.3.4)$$

Setzt man in dieser Funktion $\vartheta = \vartheta_0$, so erhält man im wesentlichen den Integranden in Gl. 5.3.3. Wir werden nun zeigen, daß diese Funktion eine Kugelflächenfunktion ist und nach Laméschen Produkten entwickelt werden kann.

Dazu wird die Funktion $f(\vartheta, \varphi)$ in Abhängigkeit von den Kugelkoordinaten ϑ und φ angeschrieben. Mit Gl. 2.1.6 gilt nämlich

$$\sin \vartheta \cos \varphi = \sin \bar{\vartheta} \cos \bar{\varphi}$$

und

$$\cos \vartheta \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi} = \cos \bar{\vartheta}$$

und damit

$$f(\vartheta, \varphi) = \bar{f}(\bar{\vartheta}, \bar{\varphi}) = \cos \bar{\varphi} P_{p_i}^1(\cos \bar{\vartheta}) \quad .$$

Dies ist aber eine Kugelflächenfunktion, die sowohl in Kugelkoordinaten als auch in elliptischen Kegelkoordinaten (vgl. Anhang 4) der Differentialgleichung

$$(\mathbf{r} \times \nabla)^2 f = -p_i(p_i + 1) f \quad (5.3.5)$$

genügt.

Desweiteren ist diese Funktion ungerade symmetrisch zu der (y, z) -Ebene und eindeutig auf dem Sektor $\vartheta = 0$, da die Legendrefunktion dort keine Singularität besitzt und damit f an dieser Stelle verschwindet (Gl. 5.3.4). Genau wie die Kugelflächenfunktionen zu ganzzahligem Index (Anhang 4) kann $f(\vartheta, \varphi)$ also auch nach Laméschen Produkten entwickelt werden, da das System der Laméschen Produkte zu vorgegebenem Eigenwert p_i ein vollständiges Funktionensystem über dem Raum der stetigen und differenzierbaren Lösungen von Gl. 5.3.5 bildet ([34]).

Der Reihenansatz für $f(\vartheta, \varphi)$ ist dabei aufgrund der Symmetrieeigenschaften dieser Funktion so zu wählen, daß über die Laméschen Produkte des Typs II zu allen Eigenwertpaaren (p_i, λ_m) , $m = 1, 2, 3, \dots$ bei festem p_i summiert wird. Es müssen hier auch die Eigenwerte λ_m mit $\lambda_m > p_i(p_i + 1)$ berücksichtigt werden, da f bei $\vartheta = \vartheta_0$ weder der Dirichlet- noch der v. Neumann-Bedingung genügt.¹⁶

Zur Aufstellung des Reihenansatzes führen wir vorübergehend bei den Laméschen Funktionen zwei zusätzliche Indizes ein, wobei der erstere die Eigenwertkurve und der zweite den Funktionstyp kennzeichnet.

Man kann dann ansetzen

$$f(\vartheta, \varphi) = \sum_m a_m \Phi_{p_i, m, 2}(\varphi) \Theta_{p_i, m, 2}(\vartheta) \quad . \quad (5.3.6)$$

¹⁶Die Laméschen Produkte, deren Eigenwerte λ_m kleiner als $p_i(p_i + 1)$ sind, bilden nur bezüglich der Funktionen zur Dirichlet- bzw. zur v. Neumann-Bedingung ein vollständiges Funktionensystem ([34]).

Der Eigenwert $\lambda_{\bar{m}}$ sei nun derjenige Eigenwert, für den die nicht-periodische Lamésche Funktion die Randbedingung

$$\Theta_{p_1, \bar{m}, 2}(\vartheta_0) = 0 \quad (5.3.7)$$

erfüllt. Die Eigenfunktion zu dem Eigenwertpaar $(p_1, \lambda_{\bar{m}})$ ist dann genau diejenige Eigenfunktion des Randwertproblems, deren Koeffizient V_{p_1} berechnet werden soll.

Für diesen gilt dann nach Gl. 5.3.3

$$V_{p_1}(u) = \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \vartheta_0} \sum_m a_m \Theta_{p_1, m, 2}(\vartheta_0) \int_0^{2\pi} \frac{\Phi_{p_1, \bar{m}, 2}(\varphi') \Phi_{p_1, m, 2}(\varphi')}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi'}} d\varphi' \quad (5.3.8)$$

mit

$$u = \cos \vartheta_0 \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi'}$$

Aufgrund der Orthogonalitätsrelation der periodischen Laméschen Funktionen (Gl. A2.1.6) ist das Integral in Gl. 5.3.8 nur für $m = \bar{m}$ von Null verschieden. Dieser Summand verschwindet aber offenbar aufgrund der Randbedingung 5.3.7, so daß man erhält ¹⁷

$$V_{p_1}(u) = 0 \quad \text{für} \quad u = \cos \vartheta_0 \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi'} \quad (5.3.9)$$

Führt man die gleiche Rechnung für $u = -\cos \vartheta_0 \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi'}$ durch, so muß in Gl. 5.3.4 das Vorzeichen in dem Argument der Legendrefunktion umgedreht werden. Die so erhaltene Funktion

$$f(\vartheta, \varphi) := \sin \vartheta \cos \varphi \frac{P_{p_1}^1(-\cos \vartheta \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi})}{\sqrt{1 - \cos^2 \vartheta (1 - k'^2 \sin^2 \varphi)}}$$

ist dann aber an der Stelle $(\vartheta = 0, \varphi = 0)$ nicht mehr eindeutig, da die Legendrefunktion dort singularär wird. Ein zu Gl. 5.3.6 äquivalenter Reihenansatz kann deshalb hier nicht aufgestellt werden, da $f(\vartheta, \varphi)$ nicht in dem gesamten Lösungsgebiet differenzierbar ist. Es gilt deshalb

$$V_{p_1}(u) \neq 0 \quad \text{für} \quad u = -\cos \vartheta_0 \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi'} \quad (5.3.10)$$

¹⁷Man beachte hier und in den folgenden Ausführungen, daß die Kegel durch $\pi/2 < \vartheta_0 \leq \pi$ beschrieben werden, und damit $\cos \vartheta_0 < 0$ ist.

Die hergeleiteten Eigenschaften der Koeffizienten V_{p_i} ergeben sich in dem rotationssymmetrischen Fall $k^2 = 1$ direkt, da die Legendrefunktionen dort selbst Lösungsfunktionen des Randwertproblems sind (Gl. 5.2.9 und 5.2.10). Für den Fall $k^2 \neq 1$ haben wir diese Eigenschaften für verschiedene Kegelöffnungswinkel durch numerische Auswertung des Integrals in Gl. 5.1.13 überprüft und bestätigt gefunden.

Für den Koeffizient U_{q_i} ergibt sich in dem untersuchten Anregungsfall mit Gl. 5.1.12

$$U_{q_i}(u) = - \int_0^{2\pi} \sin \varphi' \Phi_{q_i}(\varphi') q_i (q_i + 1) P_{q_i}(u) d\varphi' \\ - \int_0^{2\pi} \cos \varphi' \frac{\partial \Phi_{q_i}(\varphi')}{\partial \varphi'} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} P_{q_i}^1(u) d\varphi' \quad (5.3.11)$$

mit

$$u = \pm \cos \vartheta_0 \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi'}.$$

Für Φ_{q_i} ist hier die periodische Lamésche Funktion einzusetzen (Anh. 2). Aus der Symmetrie des Integranden kann man schließen, daß nur der Funktionstyp IV einen von Null verschiedenen Koeffizienten liefert. Weiterhin hat sich bei der numerischen Auswertung gezeigt, daß die beiden Integrale im Rahmen der Rechengenauigkeit bis auf das Vorzeichen gleich sind. Die Vorzeichen ergeben sich dabei so, daß gilt

$$U_{q_i} = 0 \quad \text{für} \quad u = + \cos \vartheta_0 \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi'}, \quad (5.3.12)$$

und

$$U_{q_i} \neq 0 \quad \text{für} \quad u = - \cos \vartheta_0 \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi'}. \quad (5.3.13)$$

Dies entspricht den Ergebnissen im rotationssymmetrischen Fall. Ein analytischer Beweis hierfür ist bislang allerdings noch nicht gelungen. Da wir die Gleichungen 5.3.12 und 5.3.13 aber für eine ganze Reihe von Kegelöffnungswinkeln und jeweils zugehörigen Eigenwerten q_i durch numerische Auswertung von Gl. 5.3.11 überprüft und bestätigt gefunden haben, gehen wir in der Folge von der Gültigkeit dieser Gleichungen aus. Ein relativer Fehler bei der Bestimmung des vermutlich verschwindenden Anteils in dem Koeffizienten der Feldentwicklung würde sich auf das Endergebnis nicht auswirken, da zu diesem Anteil eine vergleichsweise große Zahl addiert wird.

Bei den numerischen Auswertungen erweist es sich als günstig, daß die Koeffizientenintegrale, in denen die Legendrefunktionen zu negativen Argumenten benötigt werden, identisch verschwinden. Diese können nämlich nur mit erheblichem numerischen Aufwand berechnet werden. Dagegen ist die Berechnung der Integranden, in denen diese Funktionen mit positivem Argument stehen, problemlos, da hier zur Berechnung der Legendrefunktionen die Methode der Rückwärtsrekursion ([26]) benutzt werden kann, während diese Methode im Fall negativer Argumente der Legendrefunktionen nicht stabil ist. Die numerische Quadratur mit Hilfe der Gauß-Integration ([71]) erweist sich dann bei der Berechnung der Koeffizienten als numerisch stabil und ausreichend genau.

Mit Gl. 5.1.11 hat man nun eine Entwicklung des Streufeldes der Form

$$\mathbf{E}_f' = -jE_0 \frac{\pi e^{-j\kappa r}}{2 \kappa r} \left[\sum_i^{(IV)} \alpha_{q_i} \mathbf{m}_{q_i}(\vartheta, \varphi) + \sum_i^{(II)} \beta_{p_i} \mathbf{n}_{p_i}(\vartheta, \varphi) \right] \quad (5.3.14)$$

vorliegen, deren Koeffizienten unter Berücksichtigung der Ausführungen in diesem Abschnitt durch numerische Integration berechnet werden können.

Das Feld in Rückstreurichtung erhält man aus Gl. 5.3.14, indem man $\vartheta = 0$ und $\varphi = 0$ setzt, so daß sich für den Radarrückstreuquerschnitt bei Polarisierung der einfallenden Welle in x -Richtung nach der Definition 5.2.23 ergibt

$$\sigma_x = \lambda_0^2 \frac{\pi}{4} \left| \sum_i^{(IV)} \alpha_{q_i} \mathbf{m}_{q_i}(0, 0) + \sum_i^{(II)} \beta_{p_i} \mathbf{n}_{p_i}(0, 0) \right|^2. \quad (5.3.15)$$

In dem Fall der Polarisierung der einfallenden Welle in y -Richtung gelten die Herleitungen in diesem Abschnitt entsprechend. Es müssen lediglich die Funktionstypen II und IV miteinander vertauscht werden, da die Symmetrie der Anregung hier um 90° gedreht ist. Man erhält dann für den Rückstreuquerschnitt σ_y einen zu Gl. 5.3.15 äquivalenten Ausdruck.

Bei der Berechnung des Radarrückstreuquerschnittes sind wir davon ausgegangen, daß bei kleiner Differenz zwischen den beiden Hauptöffnungswinkeln des Kegels die Reihen in Gl. 5.3.15 die gleichen Eigenschaften aufweisen, wie die entsprechenden Reihen im rotationssymmetrischen Fall (Gl. 5.2.24). Im einzelnen heißt dies, daß die Summationstechnik, die in Kap. 5.2 beschrieben wird, auch in diesem Fall angewendet werden kann, und daß ausschließlich die jeweilige Eigenwertkurve niedrigster Ordnung einen signifikanten Beitrag

liefert. Da die Eigenwerte auf einer Eigenwertkurve asymptotisch im Abstand ϑ_0/π aufeinander folgen (s. Anhang 2.3), erweist sich die angewendete Summationstechnik auch hier als effizient. Bei den Auswertungen hat es sich als günstig erwiesen, $N \geq 4$ zu wählen.

Zur Kontrolle wurden bei der Auswertung zusätzlich die Summen über die Eigenwerte auf der jeweils zweiten Eigenwertkurve gebildet. Dabei hat sich herausgestellt, daß die getroffenen Annahmen gut erfüllt sind, wenn man sich auf Kegelöffnungswinkel mit

$$\alpha_{\min} \leq 10^\circ \quad \text{und} \quad \alpha_{\min} < \alpha_{\max} \leq \alpha_{\min} + 10^\circ$$

beschränkt. Außerhalb dieses Bereiches tragen offensichtlich die höheren Eigenwertkurven signifikant zu den Summen bei, so daß die Vorgehensweise bei der Auswertung in diesen Fällen abgeändert werden muß. Aufgrund des hohen Rechenaufwandes konnte dies hier allerdings nicht weiter untersucht werden.

Ergebnisse für einen elliptischen Kegel mit $\alpha_{\min} = 10^\circ$ und $12^\circ \leq \alpha_{\max} \leq 20^\circ$ sind in Abb. 5.3.2 aufgetragen. Als Vergleichsgröße ist dort der Wert eingetragen, den die physikalisch optische Näherung liefert (vgl. Kap. 5.4).¹⁸ Man sieht, daß die strenge Theorie Werte für den Rückstreuquerschnitt liefert, die umso stärker von der physikalisch optischen Näherung abweichen, je größer die Differenz zwischen den beiden Hauptöffnungswinkeln, also die Abweichung von dem rotationssymmetrischen Fall ist.

Besonders deutlich wird dies im Fall des Sektors ($\alpha_{\min} = 0^\circ$). Dort liefert die physikalisch optische Näherung unabhängig von der Polarisation der einfallenden Welle einen identisch verschwindenden Rückstreuquerschnitt. Dies ist aber streng nur für den Fall der Polarisation in x -Richtung korrekt, da dann die elektrische Feldstärke der einfallenden Welle senkrecht zu der Sektorfläche steht, und das Feld durch den Sektor nicht gestört wird. Bei Polarisation in y -Richtung wird allerdings durch den Sektor ein Streufeld erzeugt, daß auch in Rückstreurichtung signifikant von Null verschieden ist.

Der Verlauf des Radarrückstreuquerschnittes über dem Sektoröffnungswinkel ist für diesen Polarisationsfall in Abb. 5.3.3 aufgetragen. Die Auswertung der strengen Theorie ist auch in diesem Fall nur für kleine Sektoröffnungswinkel durchgeführt worden. Für größere Öffnungswinkel muß aus den oben angeführten Gründen die Methodik der Auswertung abgeändert werden. Es fällt

¹⁸In physikalisch optischer Näherung ist der Radarrückstreuquerschnitt unabhängig von der Polarisation, weshalb in Abb. 5.3.2 nur ein Wert aufgetragen ist.

auf, daß der Radarrückstreuquerschnitt des Sektors z.T. mehrere Größenordnungen größer als der des elliptischen Kegels ist. Dies ist wohl damit zu erklären, daß bei dem Sektor aufgrund des Kantenbeugungseffektes relativ große Kantenströme erzeugt werden. Die Kantenbeugungswelle selbst liefert zwar keinen Beitrag zu dem Feld in Rückstreurichtung, aber da sich die relativ großen Ströme in den beiden Kanten des Sektors in der unmittelbaren Umgebung der Sektorspitze gegenseitig beeinflussen, entsteht eine Spitzenbeugungswelle, deren Amplitude erheblich größer als die Spitzenbeugungswelle des elliptischen Kegels ist, die ausschließlich durch die punktförmige Spitze des Kegels erzeugt wird.

In dem Fall der Entartung des Sektors zu einer Halbebene wird der Radarrückstreuquerschnitt unendlich, da es sich dann um ein zweidimensionales Problem handelt. Bei kleiner werdendem Sektoröffnungswinkel ist zu erwarten, daß der Rückstreuquerschnitt immer kleiner wird, bis er bei verschwindendem Öffnungswinkel ebenfalls verschwindet. Dies entspricht dem durch die Rechnung ermittelten Verlauf.

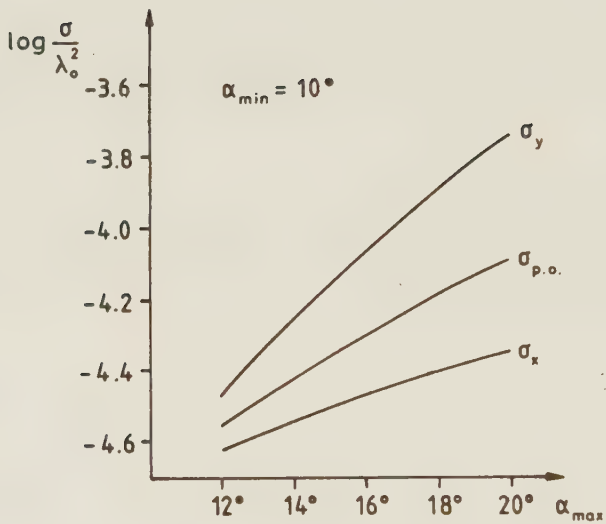


Abbildung 5.3.2: Der Rückstreuquerschnitt eines elliptischen Kegels mit $\alpha_{\min} = 10^\circ$ als Funktion des größten Öffnungswinkels
Polarisation in x-Richtung σ_x
Polarisation in y-Richtung σ_y
Physikal. optische Näherung $\sigma_{p.o.}$

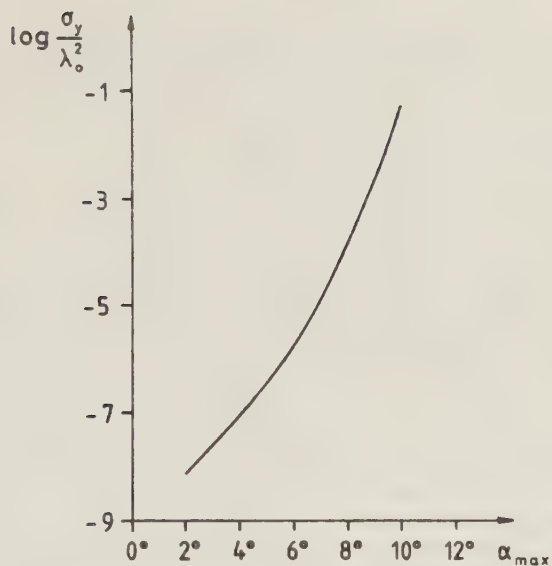


Abbildung 5.3.3: *Der Rückstreuquerschnitt eines Sektors als Funktion des Sektoröffnungswinkels bei Polarisation der einfallenden Welle in y-Richtung*

5.4 Die physikalisch optische Näherung für den Radarrückstreuquerschnitt des elliptischen Kegels

In den vorangegangenen Abschnitten haben wir den Radarrückstreuquerschnitt des elliptischen Kegels mit Hilfe einer strengen Lösung des Randwertproblems berechnet, und den so erhaltenen Wert mit der physikalisch optischen Näherung verglichen. Dieser Vergleich bietet sich an, da die physikalisch optische Näherung einen einfachen Ausdruck für den Rückstreuquerschnitt liefert. Diesen Ausdruck wollen wir nun herleiten.

Bei der physikalisch optischen Näherung nimmt man an, daß die auf der Oberfläche eines Streukörpers induzierten Flächenströme keinen wechselseitigen Einfluß aufeinander ausüben, sondern allein durch die einfallende elektromagnetische Welle bestimmt werden ([64]). Diese Annahme führt in der Regel dann zu einem sinnvollen Ausdruck für das Fernfeld, wenn zum einen die Feldquellen sehr weit von dem Streukörper entfernt sind, und zum anderen die Hauptkrümmungsradien der Oberfläche des Beugungsobjektes groß sind gegen die Wellenlänge. Die zweite Voraussetzung ist zwar in der Umgebung der Kegelspitze nicht erfüllt, es zeigt sich aber ([57]), daß die physikalisch optische Methode zumindest im Fall des rotationssymmetrischen Kegels eine gute Näherung für den Rückstreuquerschnitt liefert. Auch für den elliptischen Kegel zeigt der Vergleich mit der strengen Theorie, daß mit dieser Näherung, zumindest bei kleinen Differenzen zwischen den beiden Hauptöffnungswinkeln, brauchbare Ergebnisse erzielt werden.

Bei der Berechnung des Rückstreuquerschnittes legen wir die gleiche Beugungsanordnung zugrunde wie in dem vorangegangenen Abschnitt. Sie ist in Abb. 5.4.1 noch einmal skizziert.

Die einfallende Welle ist dann wieder durch

$$\mathbf{E}^i = E_0 \mathbf{e}_x e^{j\kappa \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{r}} \quad (5.4.1)$$

$$\mathbf{H}^i = -\frac{E_0}{Z_0} \mathbf{e}_y e^{j\kappa \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{r}} \quad (5.4.2)$$

gegeben.

Nach [64, Kap. 11.8] gilt für das Streufeld der Anordnung in physikalisch optischer Näherung

$$\mathbf{E}_{p.o.}^s = -\frac{E_0}{Z_0} \frac{e^{-j\kappa r}}{r} \frac{j\omega\mu}{2\pi} \iint_M \mathbf{e}_r \times [\mathbf{e}_r \times (\mathbf{e}_{\theta'} \times \mathbf{e}_y)] e^{j\kappa(\mathbf{e}_s + \mathbf{e}_r) \cdot \mathbf{r}'} df' \quad (5.4.3)$$

mit

$$\zeta = \cos \vartheta_0 \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi'} \quad .$$

Die Integration über r' kann mit Hilfe partieller Integration durchgeführt werden, und man erhält

$$\int_0^\infty r' e^{j2\kappa\zeta r'} dr' = \frac{1}{j2\kappa\zeta} r' e^{j2\kappa\zeta r'} \Big|_0^\infty - \frac{1}{(j2\kappa\zeta)^2} e^{j2\kappa\zeta r'} \Big|_0^\infty \quad .$$

Die Beiträge von $r' \rightarrow \infty$ verschwinden hier, da wir das den Kegel umgebende Medium als Grenzfall eines verlustbehafteten Mediums auffassen. Es gilt somit

$$\int_0^\infty r' e^{j2\kappa\zeta r'} dr' = \frac{-1}{4\kappa^2} \frac{1}{\cos^2 \vartheta_0 (1 - k'^2 \sin^2 \varphi')}$$

Dieses Ergebnis setzt man wieder in Gl. 5.4.5 ein, und muß dann noch das Integral

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\varphi'}{1 - k'^2 \sin^2 \varphi'} = \frac{2\pi}{k}$$

bilden, um schließlich für das Streufeld den Ausdruck

$$\mathbf{E}_{p.o.}' = -\frac{E_0}{Z_0} \frac{e^{-j\kappa r}}{r} \frac{j\omega\mu}{4\kappa^2} \frac{1}{k} \frac{\sin \vartheta_0 \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \vartheta_0}}{\cos^2 \vartheta_0} \mathbf{e}_z$$

zu erhalten.

Mit $\kappa = \omega\sqrt{\epsilon\mu}$ und $Z_0 = \sqrt{\mu/\epsilon}$ kann dies noch zu

$$\mathbf{E}_{p.o.}' = \frac{E_0}{4j} \frac{e^{-j\kappa r}}{\kappa r} \frac{\sin \vartheta_0 \sqrt{1 - k^2 \cos^2 \vartheta_0}}{k \cos^2 \vartheta_0} \mathbf{e}_z \quad (5.4.6)$$

vereinfacht werden.

Für den Radarrückstreuquerschnitt erhält man damit

$$\begin{aligned} \sigma_{p.o.} &= \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \frac{|\mathbf{E}_{p.o.}'|^2}{|\mathbf{E}^i|^2} \\ &= \frac{\lambda^2}{16\pi} \frac{\sin^2 \vartheta_0 (1 - k^2 \cos^2 \vartheta_0)}{k^2 \cos^4 \vartheta_0} \end{aligned} \quad (5.4.7)$$

Setzt man noch wegen

$$\vartheta_0 = \pi - \alpha_{\min} \quad \text{und} \quad k = \frac{\cos \alpha_{\max}}{\cos \alpha_{\min}}$$

in Gl. 5.4.7

$$k \cos \vartheta_0 = -\cos \alpha_{\min}$$

und

$$\cos \vartheta_0 = -\cos \alpha_{\min}$$

ein (vgl. Kap. 2.1), so ergibt sich schließlich

$$\sigma_{p.o.} = \frac{\lambda^2}{16\pi} \tan^2 \alpha_{\min} \tan^2 \alpha_{\max} \quad , \quad (5.4.8)$$

woraus man auch unmittelbar den bekannten Ausdruck für den Rückstreuquerschnitt des rotationssymmetrischen Kegels ([57])

$$\sigma_{p.o.} = \frac{\lambda^2}{16\pi} \tan^4 \alpha \quad \text{für} \quad \alpha_{\min} = \alpha_{\max} = \alpha$$

ablesen kann.

Die Symmetrie dieses Ausdrucks in $\alpha_{\min}$ und $\alpha_{\max}$ ist auch eine plausible Erklärung dafür, daß bei einer Polarisierung der einfallenden Welle in y -Richtung der gleiche physikalisch optische Radarrückstreuquerschnitt resultiert ([16]). Der Verlauf von $\sigma_{p.o.}$ über den beiden Kegelöffnungswinkeln ist in Abb. 5.4.2 illustriert. Man erkennt, daß $\sigma_{p.o.}$ im Fall des Keils singulär wird. Hier muß der Radarrückstreuquerschnitt anders definiert werden, da es sich um ein zweidimensionales Beugungsproblem handelt.

Es sei noch erwähnt, daß die hier vorgestellte Methode auch im bistatischen Fall einen einfachen Ausdruck für den Rückstreuquerschnitt liefert ([17]), wenn die einfallende Welle längs der z -Richtung läuft, und der Empfänger in einer der beiden Symmetrieebenen des Kegels liegt. Bei beliebiger Lage von Sender und Empfänger müssen die auftretenden Integrale allerdings numerisch berechnet werden. Ebenso wenig ist es bislang gelungen, den Fall eines endlichen elliptischen Kegels in physikalisch optischer Näherung zu behandeln. Überlegungen zur Lösung des Problems der Beugung an einem endlichen elliptischen Kegel mit Hilfe einer Modenanpassung wollen wir in einem abschließenden Abschnitt vorstellen.

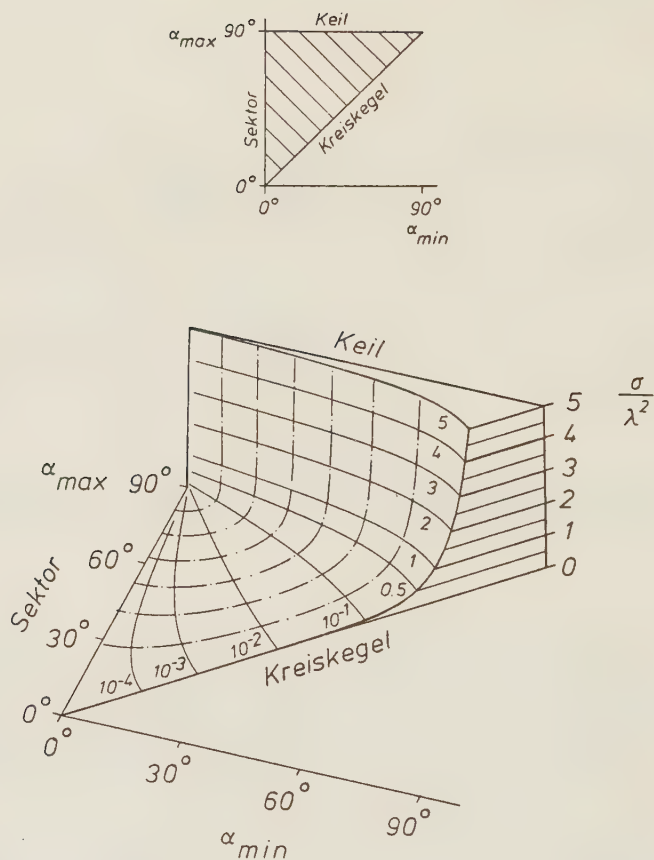


Abbildung 5.4.2: Der physikalisch optische Radarrückstreuquerschnitt eines elliptischen Kegels

5.5 Anmerkungen zur Beugung einer ebenen Welle an einem elliptischen Kegel endlicher Länge

Das Problem der Beugung einer elektromagnetischen Welle an einem semi-infiniten Kegel kann mit Hilfe der dyadischen Greenschen Funktion der Anordnung auf ein Quadraturproblem zurückgeführt werden. Man erhält mit dieser Methode, wie wir gesehen haben, eine Reihenentwicklung, deren Koeffizienten durch Integration über die Feldquellen berechnet werden können. Der Koeffizient eines einzelnen Summanden in dieser Entwicklung hängt nicht von den anderen Termen der Reihe ab. Insbesondere hängt dieser Koeffizient bei einer Approximation des Feldes durch eine endliche Reihe nicht von der Stelle ab, an der die unendliche Reihenentwicklung abgebrochen wird. Man spricht deshalb von einer endgültigen Koeffizientenbestimmung.

Bei dem Problem der Beugung an einem Kegel endlicher Länge kann dagegen die in Kap. 3 hergeleitete Greensche Dyade nicht zur Bestimmung des Feldes herangezogen werden, da nur ein Teilbereich des Kegelmantels $\vartheta = \vartheta_0$ zu der Berandung des Lösungsgebietes gehört.

Man geht hier zweckmäßig so vor, daß man zunächst geeignete Reihenansätze für das Feld aufstellt und die Koeffizienten dieser Reihenentwicklungen dann mit Hilfe der Rand- und Stetigkeitsbedingungen des Feldes bestimmt. Die Koeffizienten der so gefundenen Feldentwicklung hängen dann von der Anzahl der mitgeführten Reihenterme ab, so daß es sich hier um ein Problem mit nicht endgültig bestimmten Koeffizienten handelt. Das beschriebene Verfahren ist von Northover [46] und später von Rogers u.a. [48]¹⁹ für den Fall des rotationssymmetrischen Kegels untersucht worden. In dem Fall des elliptischen Kegels muß die dort vorgestellte Methode abgewandelt werden. Wir betrachten dazu das folgende Beugungsproblem.

Auf einen elliptischen Kegel der Länge r_0 , der an seinem Ende durch eine Kugelkappe abgeschlossen ist (Abb. 5.5.1), falle eine ebene, elektromagnetische Welle ein, die durch den Ausbreitungsvektor $\mathbf{e}_\kappa = -\mathbf{e}_z$ und den Polarisationsvektor $\mathbf{p} = \mathbf{e}_x$ beschrieben wird. Der elektrische Feldstärkevektor dieser Welle ist dann gegeben durch

$$\mathbf{E}^i = E_0 \mathbf{e}_x e^{-j\kappa \mathbf{e}_\kappa \cdot \mathbf{r}}. \quad (5.5.1)$$

¹⁹Die Rechnung in [48] enthält Fehler. Korrekturen des Ansatzes sind in [3] zu finden.

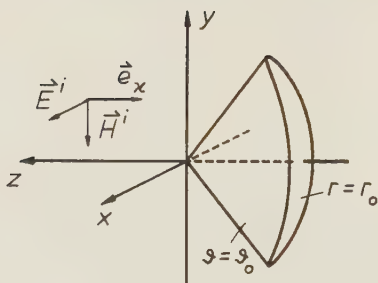


Abbildung 5.5.1: Geometrie der Beugungsanordnung

Um zu einem zweckmäßigen Ansatz für das Streufeld des Kegels zu gelangen, teilt man zunächst das Lösungsgebiet gemäß Abb. 5.5.2 in zwei Raumbereiche auf.

Das Raumgebiet a ist dann durch

$$\begin{aligned} 0 &\leq r \leq r_0 \\ 0 &\leq \vartheta \leq \vartheta_0 \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi \end{aligned}$$

gegeben. Das elektromagnetische Gesamtfeld in diesem Raumgebiet muß der Randbedingung

$$\mathbf{E}_{\text{tan}} = 0 \quad \text{für} \quad \vartheta = \vartheta_0$$

genügen, und an der Kegelspitze $r=0$ die Energiebedingung erfüllen. Zudem wird die Symmetrie des Feldes in φ durch die endliche Länge des Kegels nicht beeinflusst, so daß man hier dieselben Funktionstypen ansetzen kann wie in dem Fall des semi-infiniten Kegels. Man gelangt so zu dem Reihenansatz

$$\mathbf{E}^a = E_0 \sum_i^{(IV)} A_{q_i} \mathbf{M}_{q_i}^{(1)}(\mathbf{r}) + E_0 \sum_i^{(II)} B_{p_i} \mathbf{N}_{p_i}^{(1)}(\mathbf{r}) \quad (5.5.2)$$

für das Gesamtfeld in Bereich a . Der obere Index der vektoriellen Entwicklungsfunktionen gibt dabei an, daß hier bezüglich der r -Abhängigkeit die

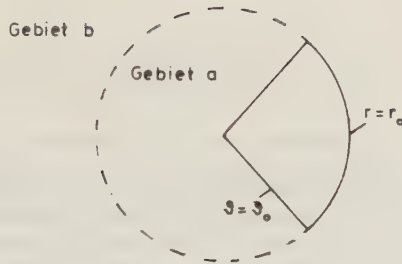


Abbildung 5.5.2: Aufteilung des Lösungsgebietes

sphärischen Besselfunktionen anzusetzen sind, und die Kennzeichnung über dem Summenzeichen legt den Funktionstyp der Laméschen Funktionen fest. Die magnetische Feldstärke $\mathbf{H}$ kann wieder mittels Rotationsbildung aus der elektrischen Feldstärke berechnet werden.

Der Raumbereich b wird durch

$$\begin{aligned} 0 &\leq r < \infty \\ 0 &\leq \vartheta \leq \pi \\ 0 &\leq \varphi \leq 2\pi \end{aligned}$$

beschrieben. Hier ist das Feld so anzusetzen, daß es über dem gesamten Bereich differenzierbar ist und für $r \rightarrow \infty$ der Sommerfeldschen Ausstrahlungsbedingung genügt.

In der Feldentwicklung dürfen aufgrund der geforderten Differenzierbarkeit nur die Laméschen Polynome benutzt werden (Anhang 3).

Da die Ausstrahlungsbedingung nur für das Streufeld, nicht aber für die einfallende Welle gilt, teilt man hier zweckmäßig das Gesamtfeld $\mathbf{E}^b$ in eine Summe

$$\mathbf{E}^b = \mathbf{E}^i + \mathbf{E}^s \quad (5.5.3)$$

auf, und macht zunächst nur einen Ansatz für das unbekannte Streufeld des

Kegels

$$\mathbf{E}^s = E_0 \sum_{n,m}^{(IV)} C_{n,m} \mathbf{M}_{n,m,4}^{(2)}(\mathbf{r}) + E_0 \sum_{n,m}^{(II)} D_{n,m} \mathbf{N}_{n,m,2}^{(2)}(\mathbf{r}) \quad (5.5.4)$$

Hier ist eine Doppelsumme über n und m anzusetzen, da zu jedem Eigenwert $\nu = n$ eine bestimmte Anzahl von Entartungen der Lösungsfunktionen gehört. Der obere Index der Entwicklungsfunktionen legt hier fest, daß in den M- und N-Funktionen sphärische Hankelfunktionen einzusetzen sind. Die unteren Indizes geben den Eigenwert n , die Entartung m und den Funktionstyp an. Für die einfallende Welle muß eine der Gl. 5.5.4 entsprechende Entwicklung aufgestellt werden. Diese erhält man mit Hilfe einer bekannten Reihenentwicklung der ebenen Welle in Kugelkoordinaten. In [58, Kap. 7.14] ist die Entwicklung ²⁰

$$E_0 \mathbf{e}_x e^{j\kappa z} = -E_0 \sum_{n=1}^{\infty} j^n \frac{2n+1}{n(n+1)} \{ (\mathbf{r} \times \nabla) \Psi_{0,1,n}(\mathbf{r}) - j [\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla)] \Psi_{e,1,n}(\mathbf{r}) \} \quad (5.5.5)$$

mit

$$\Psi_{0,1,n} = j_n(\kappa r) \sin \bar{\varphi} P_n^1(\cos \bar{\vartheta})$$

und

$$\Psi_{e,1,n} = j_n(\kappa r) \cos \bar{\varphi} P_n^1(\cos \bar{\vartheta})$$

angegeben.

In dieser Entwicklung setzt man nun die in Anhang 4 hergeleitete Darstellung der Kugelflächenfunktionen durch Lamésche Polynome

$$\cos \bar{\varphi} P_n^1(\cos \bar{\vartheta}) = \sum_m a_{nm2} \Theta_{n,m,2}(\bar{\vartheta}) \Phi_{n,m,2}(\varphi)$$

bzw.

$$\sin \bar{\varphi} P_n^1(\cos \bar{\vartheta}) = \sum_m a_{nm4} \Theta_{n,m,4}(\bar{\vartheta}) \Phi_{n,m,4}(\varphi)$$

ein, und erhält damit für das einfallende Feld die Entwicklung

$$\mathbf{E}^i = E_0 \sum_{n,m}^{(IV)} F_{n,m} \mathbf{M}_{n,m,4}^{(1)}(\mathbf{r}) + E_0 \sum_{n,m}^{(II)} G_{n,m} \mathbf{N}_{n,m,2}^{(1)}(\mathbf{r}) \quad (5.5.6)$$

²⁰Die dort angegebene Entwicklung einer in positive z -Richtung laufenden Welle kann hier direkt übernommen werden, da wir in dieser Arbeit einen anderen Zeitfaktor verwenden. Es wird lediglich durch das Vorzeichen der Reihe berücksichtigt, daß die vektoriellen Entwicklungsfunktionen hier mit einem anderen Vorzeichen als in [58] definiert sind.

mit

$$F_{n,m} = -j^n \frac{2n+1}{n(n+1)} b_{nm} \quad (5.5.7)$$

und

$$G_{n,m} = +j^n \frac{2n+1}{n(n+1)} a_{nm} \quad (5.5.8)$$

Um nun die unbekannten Koeffizienten in den Feldentwicklungen zu berechnen, nutzt man die Rand- und Stetigkeitsbedingungen des Feldes auf der Kugeloberfläche $r = r_0$ aus. Dort muß zunächst das Feld auf der gedachten Trennfläche zwischen den Raumbereichen a und b stetig sein. Es genügt dabei die Stetigkeit der Tangentialkomponenten sicherzustellen, so daß man die Komponentengleichungen

$$E_{\varphi}^a = E_{\varphi}^i + E_{\varphi}^s \quad (5.5.9)$$

$$E_{\vartheta}^a = E_{\vartheta}^i + E_{\vartheta}^s \quad (5.5.10)$$

$$H_{\varphi}^a = H_{\varphi}^i + H_{\varphi}^s \quad (5.5.11)$$

$$H_{\vartheta}^a = H_{\vartheta}^i + H_{\vartheta}^s \quad (5.5.12)$$

für

$$r = r_0, \quad 0 \leq \vartheta \leq \vartheta_0, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

erhält. Auf der Kugelkappe des Streukörpers muß zudem die Tangentialkomponente des gesamten elektrischen Feldes verschwinden, also

$$E_{\varphi}^i + E_{\varphi}^s = 0 \quad (5.5.13)$$

und

$$E_{\vartheta}^i + E_{\vartheta}^s = 0 \quad (5.5.14)$$

für

$$r = r_0, \quad \vartheta_0 \leq \vartheta \leq \pi, \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi$$

gelten.

Man setzt nun die expliziten Darstellungen der M- und N- Funktionen in den Feldentwicklungen ein und stellt dann die einzelnen Komponentengleichungen

auf. Aus Gl. 5.5.9 erhält man dann ²¹

$$\begin{aligned}
 \sum_i^{(IV)} \tilde{A}_{q_i} \frac{1}{s_\vartheta} \frac{\partial Y_{q_i}}{\partial \vartheta} - \sum_i^{(II)} \tilde{B}_{p_i} \frac{1}{s_\varphi} \frac{\partial Y_{p_i}}{\partial \varphi} = \\
 + \sum_{n,m}^{(IV)} \tilde{C}_{n,m} \frac{1}{s_\vartheta} \frac{\partial Y_{n,m,4}}{\partial \vartheta} - \sum_{n,m}^{(II)} \tilde{D}_{n,m} \frac{1}{s_\varphi} \frac{\partial Y_{n,m,2}}{\partial \varphi}
 \end{aligned} \quad (5.5.15)$$

mit

$$\begin{aligned}
 \tilde{A}_{q_i} &= A_{q_i j_{q_i}}(\kappa r_0) \\
 \tilde{B}_{p_i} &= B_{p_i} \frac{1}{\kappa r_0} \frac{d}{dr} [r j_{p_i}(\kappa r)]_{r_0} \\
 \tilde{C}_{n,m} &= C_{n,m} h_n^{(2)}(\kappa r_0) + F_{n,m} j_n(\kappa r_0) \\
 \tilde{D}_{n,m} &= D_{n,m} \frac{1}{\kappa r_0} \frac{d}{dr} [r h_n^{(2)}(\kappa r)]_{r_0} + G_{n,m} \frac{1}{\kappa r_0} \frac{d}{dr} [r j_n(\kappa r)]_{r_0} .
 \end{aligned}$$

Für die ϑ -Komponenten erhält man aus Gl. 5.5.10 die Bedingung

$$\begin{aligned}
 - \sum_i^{(IV)} \tilde{A}_{q_i} \frac{1}{s_\varphi} \frac{\partial Y_{q_i}}{\partial \varphi} - \sum_i^{(II)} \tilde{B}_{p_i} \frac{1}{s_\vartheta} \frac{\partial Y_{p_i}}{\partial \vartheta} = \\
 - \sum_{n,m}^{(IV)} \tilde{C}_{n,m} \frac{1}{s_\varphi} \frac{\partial Y_{n,m,4}}{\partial \varphi} - \sum_{n,m}^{(II)} \tilde{D}_{n,m} \frac{1}{s_\vartheta} \frac{\partial Y_{n,m,2}}{\partial \vartheta} .
 \end{aligned} \quad (5.5.16)$$

Man kombiniert die Gln. 5.5.15 und 5.5.16 nun so, daß getrennte Gleichungen für die Koeffizienten der M- und N- Funktionen resultieren. Hierzu wird zunächst Gl. 5.5.15 mit s_φ multipliziert und nach ϑ differenziert. Dadurch ergibt

²¹Zur Definition der Laméschen Produkte $Y_\nu(\vartheta, \varphi)$ s. Kap. 3.2.

sich

$$\begin{aligned} \sum_i^{(IV)} \tilde{A}_{q_i} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{s_\varphi}{s_\vartheta} \frac{\partial Y_{q_i}}{\partial \vartheta} \right) - \sum_i^{(II)} \tilde{B}_{p_i} \frac{\partial^2 Y_{p_i}}{\partial \vartheta \partial \varphi} = \\ + \sum_{n,m}^{(IV)} \tilde{C}_{n,m} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{s_\varphi}{s_\vartheta} \frac{\partial Y_{n,m,4}}{\partial \vartheta} \right) - \sum_{n,m}^{(II)} \tilde{D}_{n,m} \frac{\partial^2 Y_{p_i}}{\partial \vartheta \partial \varphi} . \end{aligned} \quad (5.5.17)$$

Multipliziert man nun Gl. 5.5.16 mit s_ϑ und differenziert nach φ , so erhält man

$$\begin{aligned} - \sum_i^{(IV)} \tilde{A}_{q_i} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{s_\vartheta}{s_\varphi} \frac{\partial Y_{q_i}}{\partial \varphi} \right) - \sum_i^{(II)} \tilde{B}_{p_i} \frac{\partial^2 Y_{p_i}}{\partial \vartheta \partial \varphi} = \\ - \sum_{n,m}^{(IV)} \tilde{C}_{n,m} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{s_\vartheta}{s_\varphi} \frac{\partial Y_{n,m,4}}{\partial \varphi} \right) - \sum_{n,m}^{(II)} \tilde{D}_{n,m} \frac{\partial^2 Y_{p_i}}{\partial \vartheta \partial \varphi} . \end{aligned} \quad (5.5.18)$$

Die Funktionen Y_ν genügen nun der Differentialgleichung (Kap. 3.2)

$$\frac{\partial}{\partial \vartheta} \left(\frac{s_\varphi}{s_\vartheta} \frac{\partial Y_\nu}{\partial \vartheta} \right) + \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{s_\vartheta}{s_\varphi} \frac{\partial Y_\nu}{\partial \varphi} \right) = -s_\vartheta s_\varphi \nu(\nu+1) Y_\nu , \quad (5.5.19)$$

so daß man durch Subtraktion der Gl. 5.5.17 von Gl. 5.5.18 und Ausnutzung der Differentialgleichung erhält

$$\sum_i^{(IV)} \tilde{A}_{q_i} q_i(q_i+1) Y_{q_i}(\vartheta, \varphi) = \sum_{n,m}^{(IV)} \tilde{C}_{n,m} n(n-1) Y_{n,m,4}(\vartheta, \varphi) \quad (5.5.20)$$

für

$$0 \leq \vartheta \leq \vartheta_0 .$$

Vertauscht man nun die Operationen, die auf die Gln. 5.5.15 und 5.5.16 angewendet wurden und addiert die so erhaltenen Gleichungen, dann ergibt sich

$$\sum_i^{(II)} B_{p_i, p_i(p_i+1)} Y_{p_i}(\vartheta, \varphi) = \sum_{n,m}^{(II)} \tilde{D}_{n,m} n(n+1) Y_{n,m,2}(\vartheta, \varphi) \quad (5.5.21)$$

für

$$0 \leq \vartheta \leq \vartheta_0 \quad .$$

Man hat somit getrennte Gleichungen für die Koeffizienten der M- und N-Anteile der Feldentwicklung gefunden. Wendet man dieselbe Technik nun auf die Randbedingungen 5.5.13 und 5.5.14 an, so erhält man die zusätzlichen Bedingungen

$$\sum_{n,m}^{(IV)} \tilde{C}_{n,m} n(n+1) Y_{n,m,4}(\vartheta, \varphi) = 0 \quad \text{für} \quad \vartheta_0 \leq \vartheta \leq \pi \quad (5.5.22)$$

und

$$\sum_{n,m}^{(II)} \tilde{D}_{n,m} n(n+1) Y_{n,m,2}(\vartheta, \varphi) = 0 \quad \text{für} \quad \vartheta_0 \leq \vartheta \leq \pi \quad . \quad (5.5.23)$$

Gleichung 5.5.20 und 5.5.22 können nun zu

$$\sum_{n,m}^{(IV)} \tilde{C}_{n,m} n(n+1) Y_{n,m,4}(\vartheta, \varphi) = \begin{cases} 0 & , \vartheta_0 \leq \vartheta \leq \pi \\ \sum_i^{(IV)} \tilde{A}_{q_i, q_i}(q_i+1) Y_{q_i}(\vartheta, \varphi) & , 0 \leq \vartheta \leq \vartheta_0 \end{cases} \quad (5.5.24)$$

zusammengefaßt werden.

Durch Multiplikation dieser Gleichung mit $Y_{n,m,4}$ und Integration bezüglich ϑ und φ über die Oberfläche der Einheitskugel erhält man mit Hilfe der Orthogonalitätsrelation der Laméschen Polynome (Gl. A3.4)

$$\tilde{C}_{n,m} n(n+1) = \sum_i^{(IV)} \tilde{A}_{q_i, q_i}(q_i+1) \int_0^{2\pi} \int_0^{\vartheta_0} Y_{q_i}(\vartheta, \varphi) Y_{n,m,4}(\vartheta, \varphi) s_\vartheta s_\varphi d\vartheta d\varphi \quad (5.5.25)$$

und mit Hilfe von Gl. 5.5.21 und 5.5.23

$$\tilde{D}_{n,m} n(n+1) = \sum_i^{(II)} \tilde{B}_{p_i, p_i}(p_i+1) \int_0^{2\pi} \int_0^{\vartheta_0} Y_{p_i}(\vartheta, \varphi) Y_{n,m,2}(\vartheta, \varphi) s_\vartheta s_\varphi d\vartheta d\varphi \quad . \quad (5.5.26)$$

Die Integrale auf der rechten Seite von Gl. 5.5.25 und 5.5.26 kann man analytisch berechnen. Eine ausführliche Rechnung hierzu findet man in [29].

Wir haben somit eine Darstellung der Koeffizienten der Feldentwicklung in Raumbereich b als Summe über die Koeffizienten der Entwicklung in Bereich a gefunden. Die umgekehrte Darstellung, also die Angabe der Koeffizienten aus a durch eine Summe über die Koeffizienten aus b , kann mit Hilfe einer zu dem beschriebenen Verfahren äquivalenten Technik aus den Stetigkeitsbedingungen der magnetischen Feldstärke (Gl. 5.5.11 + 5.5.12) hergeleitet werden.

Man findet nach der Trennung der **M**- und **N**-Anteile die Gleichungen

$$\sum_i^{(IV)} \hat{A}_{q_i} q_i (q_i + 1) Y_{q_i}(\vartheta, \varphi) = \sum_{n,m}^{(IV)} \hat{C}_{n,m} n(n+1) Y_{n,m,4}(\vartheta, \varphi) \quad (5.5.27)$$

und

$$\sum_i^{(II)} \hat{B}_{p_i} p_i (p_i + 1) Y_{p_i}(\vartheta, \varphi) = \sum_{n,m}^{(II)} \hat{D}_{n,m} n(n+1) Y_{n,m,2}(\vartheta, \varphi) \quad (5.5.28)$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{A}_{q_i} &= A_{q_i} \frac{1}{\kappa r_0} \frac{d}{dr} [r j_{q_i}(\kappa r)]_{r_0} \\ \hat{B}_{p_i} &= B_{p_i} j_{p_i}(\kappa r_0) \\ \hat{C}_{n,m} &= C_{n,m} \frac{1}{\kappa r_0} \frac{d}{dr} [r h_n^{(2)}(\kappa r)]_{r_0} + F_{n,m} \frac{1}{\kappa r_0} \frac{d}{dr} [r j_n(\kappa r)]_{r_0} \\ \hat{D}_{n,m} &= D_{n,m} h_n^{(2)}(\kappa r_0) + G_{n,m} j_n(\kappa r_0) \end{aligned}$$

Durch Ausnutzung der Orthogonalitätsrelationen der Laméschen Produkte erhält man dann die Darstellungen

$$\hat{A}_{q_i} q_i (q_i + 1) = \sum_{n,m}^{(IV)} \hat{C}_{n,m} n(n+1) \int_0^{2\pi} \int_0^{\vartheta_0} Y_{q_i}(\vartheta, \varphi) Y_{n,m,4}(\vartheta, \varphi) s_\vartheta s_\varphi d\vartheta d\varphi \quad (5.5.29)$$

und

$$\hat{B}_{p_i} p_i (p_i + 1) = \sum_{n,m}^{(II)} \hat{D}_{n,m} n(n+1) \int_0^{2\pi} \int_0^{\vartheta_0} Y_{p_i}(\vartheta, \varphi) Y_{n,m,2}(\vartheta, \varphi) s_\vartheta s_\varphi d\vartheta d\varphi \quad (5.5.30)$$

Expandiert man nun die Abkürzungen der Koeffizienten wieder und setzt dann die einzelnen Summendarstellungen der Koeffizienten wechselseitig ineinander ein, so erhält man für jeden Koeffiziententyp ein lineares Gleichungssystem, dessen rechte Seite durch die Koeffizienten der ebenen Welle bestimmt wird.

Die Koeffizientenmatrizen und rechten Seiten der Gleichungssysteme hängen hier sowohl von dem Verhältnis aus Kegellänge zur Wellenlänge ab, als auch von der Anzahl der mitgeführten Terme in den Feldentwicklungen. Es ist deshalb bei der Auswertung der Methode zu einem vorgegebenen Wert von κr_0 die Anzahl der Summanden in den Feldentwicklungen solange zu erhöhen, bis die Koeffizienten hinreichend genau bestimmt sind.

Prinzipiell kann dabei die Anzahl der Terme in den Feldentwicklungen in Raumbereich a und b unabhängig voneinander gewählt werden. Es stellt sich aber heraus, daß insbesondere bei größeren Kegellängen ($r_0/\lambda_0 > 0.1$) die gewonnenen Ergebnisse sehr stark von dem Verhältnis der Anzahl mitgeführter Summenterme im Außenraum zu der entsprechenden Anzahl Terme im Innenraum abhängt. Dieses Problem tritt immer dann auf, wenn man die Koeffizienten zweier Feldentwicklungen mit Hilfe der Stetigkeitsbedingung des Feldes an einer Stelle bestimmt, an der Singularitäten des Feldes auftreten. Man spricht in diesem Zusammenhang von dem Problem der relativen Konvergenz ([44],[40]), das hier aufgrund der Kantensingularität an dem Übergang zwischen Kegelmantel und Kugelkappe auftritt. Wegen der Vielzahl der Parameter, von denen die optimale Wahl des Grenzübergangs zu unendlich vielen Termen abhängt, konnten hier insbesondere bei großen Kegellängen keine allgemeingültigen Regeln zur Durchführung dieses Grenzprozesses aufgestellt werden. Bei kleinen Kegellängen scheint das Verfahren aber weitgehen unkritisch in Bezug auf das Problem der relativen Konvergenz zu sein. Wir haben deshalb die beschriebene Methodik für diesen Fall ausgewertet.

Mit der Bestimmung der Koeffizienten der Feldentwicklung in dem Raumbereich b erhält man nun eine Darstellung des Streufeldes des endlichen elliptischen Kegels, die der Felddarstellung nach Gl. 5.3.14 entspricht.²² Aus dieser kann dann der Radarrückstreuquerschnitt des Kegels berechnet werden. In dem Fall der Polarisierung der einfallenden Welle in y -Richtung kann man genauso vorgehen wie in dem behandelten Fall der Polarisierung in x -Richtung.

²²In der dort angegebenen Entwicklung müssen lediglich die Laméschen Funktionen durch Lamésche Polynome ersetzt werden.

Es müssen lediglich aufgrund der veränderten Symmetrie der Anregung die Funktionstypen *II* und *IV* miteinander vertauscht, und die Entwicklung der ebenen Welle entsprechend angepaßt werden. Ergebnisse hierzu sind in Abb. 5.5.3 aufgetragen. Leider liegen für die dort aufgetragenen Kurven keine vergleichbaren Ergebnisse aus der Literatur vor. Wir verzichten deshalb hier auf eine Diskussion der berechneten Werte.

Um das Verfahren auch bei größeren Kegellängen anwenden zu können, muß das Problem der relativen Konvergenz genauer untersucht werden. Da aber zu erwarten ist, daß auch bei einer diesbezüglichen Optimierung des Verfahrens der numerische Aufwand zur Berechnung der Koeffizienten sehr umfangreich wird, erscheint es sinnvoll, zur Behandlung dieses Falles asymptotische Techniken einzusetzen ([67]). Der numerische Aufwand wird dabei allerdings ebenfalls sehr groß, wenn man versucht, die Beugungseffekte der Kegelspitze mit zu erfassen. Dies ist bislang nur mit Hilfe numerischer Methoden möglich.

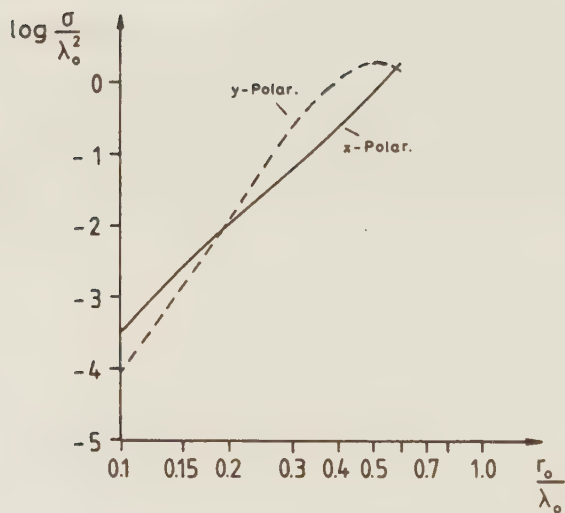


Abbildung 5.5.3: *Rückstreuquerschnitt eines endlichen elliptischen Kegels als Funktion der Kegellänge*
 $\alpha_{\min} = 30^\circ$, $\alpha_{\max} = 60^\circ$
 Polarisation in x-Richtung ———
 Polarisation in y-Richtung - - - -

Anhang

A1 Herleitung der benutzten Operatorbeziehungen

In Kapitel 3 wurden verschiedene vektoranalytische Beziehungen ohne Herleitung benutzt. Beweise zu diesen Operatorbeziehungen sollen hier nachgeliefert werden. Dabei beziehen wir uns verschiedentlich auf die Tabelle vektoranalytischer Gleichungen in [11, S. 54 f.].

$\mathbf{F}$ sei eine Vektorfunktion und Φ eine skalare Funktion des Ortes, zudem sei $\mathbf{r}$ der Ortsvektor. Dann gilt

$$\begin{aligned}
 \text{a)} \quad (\mathbf{r} \times \nabla) \Phi &= -\nabla \times (\mathbf{r} \Phi) \\
 \text{b)} \quad (\mathbf{r} \times \nabla) \cdot \mathbf{F} &= \mathbf{r} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = -\nabla \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \\
 \text{c)} \quad (\mathbf{r} \times \nabla) \times \mathbf{F} &= \mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{F} - \mathbf{r} (\nabla \cdot \mathbf{F}) \\
 \text{d)} \quad \nabla \cdot (\mathbf{r} \cdot \nabla) \nabla \times \mathbf{F} &= 0 \\
 \text{e)} \quad \nabla \times (\mathbf{r} \cdot \nabla) \nabla \Phi &= 0 \\
 \text{f)} \quad (\mathbf{r} \times \nabla) \cdot \nabla^2 \mathbf{F} &= \nabla^2 [(\mathbf{r} \times \nabla) \cdot \mathbf{F}] \\
 \text{g)} \quad \mathbf{r} \cdot \nabla^2 \mathbf{F} &= \nabla^2 (\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}) - 2 \nabla \cdot \mathbf{F} \\
 \text{h)} \quad (\mathbf{r} \times \nabla) \cdot [\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla)] \Phi &= 0 \\
 \text{i)} \quad \mathbf{r} \cdot [\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla)] \Phi &= (\mathbf{r} \times \nabla)^2 \Phi \\
 \text{j)} \quad [\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla)] \Phi &= \frac{\mathbf{r}}{r^2} (\mathbf{r} \times \nabla)^2 \Phi - \nabla_t \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Phi) \right] \\
 \text{k)} \quad \nabla^2 (\mathbf{r} \times \nabla)^2 \Phi &= (\mathbf{r} \times \nabla)^2 \nabla^2 \Phi \\
 \text{l)} \quad [\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla)] \cdot \mathbf{F} &= \nabla^2 [\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}] - 4 \nabla \cdot \mathbf{F} - \mathbf{r} \cdot (\nabla \nabla \cdot \mathbf{F}) \\
 \text{m)} \quad [\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla)] \cdot [\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla)] \Phi &= (\mathbf{r} \times \nabla)^2 \nabla^2 \Phi = \nabla^2 (\mathbf{r} \times \nabla)^2 \Phi
 \end{aligned}$$

(A1.1)

zu a) Nach [11, A40] gilt

$$\begin{aligned}\nabla \times [\mathbf{r}\Phi] &= \Phi \nabla \times \mathbf{r} + (\nabla \Phi) \times \mathbf{r} \\ &= -\mathbf{r} \times (\nabla \Phi) \\ &= -(\mathbf{r} \times \nabla) \Phi\end{aligned}$$

zu b) Der erste Teil der Gleichung ist einfach eine Anwendung der Vertauschungsregel für Spatprodukte. Den zweiten Teil zeigt man mit Hilfe von [11, A31, A44]

$$\nabla \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{r} - \mathbf{r} \cdot \nabla \times \mathbf{F} \quad .$$

zu c) Nach [11, A10+11] gilt für das doppelte Kreuzprodukt aus den Vektoren $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$$

und

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} \quad .$$

Durch Subtraktion dieser Gleichungen und einfache Umstellung erhält man daraus

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\mathbf{a} \quad .$$

Identifiziert man nun $\mathbf{r}$ mit $\mathbf{a}$, ∇ mit $\mathbf{b}$ und $\mathbf{F}$ mit $\mathbf{c}$, so erhält man unmittelbar

$$(\mathbf{r} \times \nabla) \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + (\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{F} - \mathbf{r}(\nabla \cdot \mathbf{F})$$

zu d) Identifiziert man in [11, A43] $\mathbf{A}$ mit $\mathbf{r}$ und $\mathbf{B}$ mit $\nabla \times \mathbf{F}$, so findet man

$$\begin{aligned}
 \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla \times \mathbf{F}) &= \mathbf{r} \nabla \cdot \nabla \times \mathbf{F} - (\nabla \times \mathbf{F}) \nabla \cdot \mathbf{r} + \\
 &\quad [(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \nabla] \mathbf{r} - (\mathbf{r} \cdot \nabla) \nabla \times \mathbf{F} \\
 &= -2 \nabla \times \mathbf{F} - (\mathbf{r} \cdot \nabla) \nabla \times \mathbf{F} \\
 \Rightarrow (\mathbf{r} \cdot \nabla) \nabla \times \mathbf{F} &= -2 \nabla \times \mathbf{F} - \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla \times \mathbf{F}) \\
 \Rightarrow \nabla \cdot (\mathbf{r} \cdot \nabla) \nabla \times \mathbf{F} &= 0
 \end{aligned}$$

zu e) Mit [11, A19] und $\mathbf{A} := \mathbf{r}$, $\mathbf{B} := \nabla \Phi$ gilt

$$\begin{aligned}
 \nabla(\mathbf{r} \cdot \nabla \Phi) &= (\mathbf{r} \cdot \nabla) \nabla \Phi + (\nabla \Phi \cdot \nabla) \mathbf{r} + \mathbf{r} \times (\nabla \times \nabla \Phi) + \\
 &\quad \nabla \Phi \times \nabla \times \mathbf{r} \\
 &= (\mathbf{r} \cdot \nabla) \nabla \Phi + \nabla \Phi \\
 \Rightarrow (\mathbf{r} \cdot \nabla) \nabla \Phi &= \nabla(\mathbf{r} \cdot \nabla \Phi) - \nabla \Phi \\
 \Rightarrow \nabla \times (\mathbf{r} \cdot \nabla) \nabla \Phi &= 0
 \end{aligned}$$

zu f) Mit Gl. A1.1 b)+d) und [11, A19] findet man

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 [(\mathbf{r} \times \nabla) \cdot \mathbf{F}] &= \nabla \cdot \nabla [\mathbf{r} \cdot (\nabla \times \mathbf{F})] \\
 &= \nabla \cdot \{ (\mathbf{r} \cdot \nabla) \nabla \times \mathbf{F} + [(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \nabla] \mathbf{r} + \\
 &\quad \mathbf{r} \times \nabla \times \nabla \times \mathbf{F} + (\nabla \times \mathbf{F}) \times (\nabla \times \mathbf{r}) \} \\
 &= \nabla \cdot \{ \mathbf{r} \times \nabla \times \nabla \times \mathbf{F} \} \\
 &= -\mathbf{r} \cdot \nabla \times (\nabla \times \nabla \times \mathbf{F}) \quad \quad \quad (\text{Gl. A1.1 b)}) \\
 &= -\mathbf{r} \cdot \nabla \times (\nabla \nabla \cdot \mathbf{F} - \nabla^2 \mathbf{F}) \\
 &= (\mathbf{r} \times \nabla) \cdot \nabla^2 \mathbf{F}
 \end{aligned}$$

zu g) Es gilt

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} \cdot \nabla^2 \mathbf{F} &= \mathbf{r} \cdot (-\nabla \times \nabla \times \mathbf{F} + \nabla \nabla \cdot \mathbf{F}) \\
 &= \nabla \cdot (\mathbf{r} \times \nabla \times \mathbf{F}) + \mathbf{r} \cdot \nabla \nabla \cdot \mathbf{F} && (\text{Gl. A1.1 b))} \\
 &= \nabla \cdot [\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}) - (\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{F} - \mathbf{F}] + \mathbf{r} \cdot \nabla \nabla \cdot \mathbf{F} && [11, \text{A19}] \\
 &= \nabla^2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}) - \nabla \cdot (\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{F} - \nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{r} \cdot \nabla \nabla \cdot \mathbf{F}
 \end{aligned}$$

Nach [11, A29] gilt

$$\nabla \cdot (\mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{F}) = 3 \nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{r} \cdot \nabla \nabla \cdot \mathbf{F} \quad .$$

Ersetzt man damit den Ausdruck $\mathbf{r} \cdot \nabla \nabla \cdot \mathbf{F}$, so ergibt sich

$$\mathbf{r} \cdot \nabla^2 \mathbf{F} = \nabla^2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}) - \nabla \cdot [(\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{F} + 4\mathbf{F} - \mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{F}]$$

Mit Hilfe von [11, A43] findet man zudem

$$\nabla \times (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = \mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{F} - 2\mathbf{F} - (\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{F} \quad .$$

Daraus folgt

$$2\mathbf{F} - \nabla \times (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = (\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{F} + 4\mathbf{F} - \mathbf{r} \nabla \cdot \mathbf{F}$$

und damit

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} \cdot \nabla^2 \mathbf{F} &= \nabla^2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}) - \nabla \cdot [2\mathbf{F} - \nabla \times (\mathbf{r} \times \mathbf{F})] \\
 &= \nabla^2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}) - 2 \nabla \cdot \mathbf{F} \quad .
 \end{aligned}$$

zu h)

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{r} \times \nabla) \cdot [\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla)] \Phi &= \mathbf{r} \cdot \nabla \times [\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla \Phi)] \\
 &= \mathbf{r} \cdot \nabla \times [\mathbf{r} \nabla^2 \Phi - 2 \nabla \Phi - (\mathbf{r} \cdot \nabla) \nabla \Phi] \quad [11, A43] \\
 &= \mathbf{r} \cdot \nabla \times [\mathbf{r} \nabla^2 \Phi] \\
 &= \mathbf{r} \cdot [\nabla^2 \Phi (\nabla \times \mathbf{r}) - \mathbf{r} \times \nabla \nabla^2 \Phi] \quad [11, A40] \\
 &= 0 \quad ,
 \end{aligned}$$

da $\nabla \times \mathbf{r} = 0$ und $(\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \perp \mathbf{r}$.

zu i)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} \cdot [\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla)] \Phi &= (\mathbf{r} \times \nabla) \cdot (\mathbf{r} \times \nabla) \Phi \quad (\text{Spatprodukt}) \\
 &= (\mathbf{r} \times \nabla)^2 \Phi \quad ,
 \end{aligned}$$

zu j)

$$\begin{aligned} [\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla)] \Phi &= \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla \Phi) \\ &= \mathbf{r} \nabla^2 \Phi - 2 \nabla \Phi - (\mathbf{r} \cdot \nabla) \nabla \Phi \quad [11, A43] \end{aligned}$$

Es ist nun (Kap. 2.2)

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \nabla_t$$

und damit

$$\mathbf{r} \cdot \nabla = r \frac{\partial}{\partial r} \quad .$$

Zudem ist

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} = 0 \quad ,$$

so daß man erhält

$$\begin{aligned} [\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla)] \Phi &= \mathbf{r} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} (\mathbf{r} \times \nabla)^2 \Phi \right] \\ &\quad - 2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \frac{\mathbf{r}}{r} - \frac{2}{r} \nabla_t \Phi \\ &\quad - \mathbf{r} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} - r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \nabla_t \Phi \right) \\ &= \mathbf{r} \left[\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) - \frac{2}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} \right] \\ &\quad + \frac{\mathbf{r}}{r^2} (\mathbf{r} \times \nabla)^2 \Phi \\ &\quad - \frac{2}{r} \nabla_t \Phi - \nabla_t \Phi r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial r} \nabla_t \Phi \\ &= \frac{\mathbf{r}}{r^2} (\mathbf{r} \times \nabla)^2 \Phi - \frac{2}{r} \nabla_t \Phi + \frac{1}{r} \nabla_t \Phi - \frac{\partial}{\partial r} \nabla_t \Phi \\ &= \frac{\mathbf{r}}{r^2} (\mathbf{r} \times \nabla)^2 \Phi - \nabla_t \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \Phi) \right] \end{aligned}$$

zu k) Für den Operator ∇^2 kann man in elliptischen Kegelkoordinaten die explizite Darstellung (vgl. Tab. 2.2.2)

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} (\mathbf{r} \times \nabla)^2$$

angeben. Ebenfalls anhand von Tab. 2.2.2 kann man ablesen, daß der Operator $(\mathbf{r} \times \nabla)^2$ nicht von r abhängt und damit über den gesamten r -abhängigen Teile von ∇^2 hinweggezogen werden kann. Zusätzlich vertauscht $(\mathbf{r} \times \nabla)^2$ selbstverständlich mit sich selbst, so daß man die Vertauschungsrelation

$$\nabla^2 (\mathbf{r} \times \nabla)^2 = (\mathbf{r} \times \nabla)^2 \nabla^2$$

erhält.

zu 1) Durch Anwendung der Spatproduktregel findet man zunächst

$$[\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla)] \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot [(\mathbf{r} \times \nabla) \times \mathbf{F}] \quad .$$

Setzt man dann für $(\mathbf{r} \times \nabla) \times \mathbf{F}$ den Ausdruck nach Gl. A1.1 c) ein, so ergibt sich

$$\nabla \cdot [(\mathbf{r} \times \nabla) \times \mathbf{F}] = \nabla \cdot [\mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{F})] + \nabla \cdot (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{F} - \nabla \cdot [\mathbf{r}(\nabla \cdot \mathbf{F})]$$

Für den ersten Ausdruck auf der linken Seite erhält man dann nach [11, A31]

$$\nabla \cdot [\mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{F})] = (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot (\nabla \times \mathbf{r}) - \mathbf{r} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) \quad .$$

Nach [11, A19] gilt zudem

$$\nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}) = (\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{F} + (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{r} + \mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{F}) + \mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{r}) \quad ,$$

so daß man für den zweiten Ausdruck auf der rechten Seite der Ausgangsgleichung erhält

$$\nabla \cdot [(\mathbf{r} \cdot \nabla) \mathbf{F}] = \nabla \cdot \nabla(\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}) - \nabla \cdot \mathbf{F} - \nabla \cdot [\mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{F})] \quad .$$

Für den dritten Ausdruck ergibt sich schließlich mit [11, A29]

$$\nabla \cdot [\mathbf{r}(\nabla \cdot \mathbf{F})] = (\nabla \cdot \mathbf{F})(\nabla \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{r} \cdot (\nabla \nabla \cdot \mathbf{F}) = 3 \nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{r} \cdot (\nabla \nabla \cdot \mathbf{F}) \quad .$$

Durch Einsetzen dieser drei Ausdrücke erhält man dann

$$\begin{aligned} \nabla \cdot [(\mathbf{r} \times \nabla) \times \mathbf{F}] = & \quad \nabla \cdot [\mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{F})] + \nabla^2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}) - \nabla \cdot \mathbf{F} \\ & - \nabla \cdot [\mathbf{r} \times (\nabla \times \mathbf{F})] - 3 \nabla \cdot \mathbf{F} - \mathbf{r} \cdot (\nabla \nabla \cdot \mathbf{F}) \end{aligned}$$

und damit endültig

$$[\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla)] \cdot \mathbf{F} = \nabla^2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{F}) - 4 \nabla \cdot \mathbf{F} - \mathbf{r} \cdot (\nabla \nabla \cdot \mathbf{F}) \quad .$$

zu m) Die erste Relation kann mit Hilfe von Gl. A1.1 l) bewiesen werden. Setzt man dort $\mathbf{F} = [\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla)] \Phi$, so erhält man mit

$$\nabla \cdot [\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla)] \Phi = \nabla \cdot \nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla) \Phi = 0$$

und (Gl. A1.1 i))

$$\mathbf{r} \cdot [\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla)] \Phi = (\mathbf{r} \times \nabla)^2 \Phi$$

sofort

$$[\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla)] \cdot [\nabla \times (\mathbf{r} \times \nabla)] \Phi = \nabla^2 (\mathbf{r} \times \nabla)^2 \Phi \quad .$$

Die zweite Gleichung folgt aus der Vertauschbarkeit der Operatoren ∇^2 und $(\mathbf{r} \times \nabla)^2$.

A2 Berechnung der Laméschen Funktionen bei vorgegebenen Randbedingungen auf dem Kegelmantel

A2.1 Die periodischen Laméschen Funktionen

Bei der Bestimmung des Transversalanteils $Y_\nu(\vartheta, \varphi)$ der Lösungen der homogenen Helmholtzgleichung sind wir in Kap. 3.2 von dem Separationsansatz $Y_\nu(\vartheta, \varphi) = \Theta_\nu(\vartheta)\Phi_\nu(\varphi)$ ausgegangen. Dabei wurden dort zunächst nur die wichtigsten Eigenschaften der Funktionen $\Theta_\nu(\vartheta)$ und $\Phi_\nu(\varphi)$ untersucht, die sich aus der physikalischen Problemstellung ergeben. Bei der Berechnung dieser Funktionen geht man von den Differentialgleichungen aus, die sich aus dem Separationsansatz ergeben, und stellt dann geeignete Reihenansätze auf, die den in Kap. 3.2 hergeleiteten Bedingungen genügen.

Zweckmäßig bestimmt man zunächst die periodischen Laméschen Funktionen $\Phi_\nu(\varphi)$, die der Laméschen Differentialgleichung

$$\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi} \frac{d}{d\varphi} \left[\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi} \frac{d\Phi_\nu(\varphi)}{d\varphi} \right] + [\lambda - \nu(\nu + 1)k'^2 \sin^2 \varphi] \Phi_\nu(\varphi) = 0 \quad (\text{A2.1.1})$$

genügen. Zur Lösung dieser Differentialgleichung stellt man für jeden Funktionstyp aus Tab. 3.2.1 einen geeigneten Fourier-Ansatz [34],[29] auf: ²³

$$\begin{aligned} I. \quad \Phi_\nu(\varphi) &= L_{c\nu}^{(2m)}(\varphi) = \sum_{i=0}^{\infty} A_{2i} \cos 2i\varphi & m = 0, 1, 2, \dots \\ II. \quad \Phi_\nu(\varphi) &= L_{c\nu}^{(2m+1)}(\varphi) = \sum_{i=0}^{\infty} A_{2i+1} \cos(2i+1)\varphi & m = 0, 1, 2, \dots \\ III. \quad \Phi_\nu(\varphi) &= L_{s\nu}^{(2m)}(\varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} B_{2i} \sin 2i\varphi & m = 1, 2, 3, \dots \\ IV. \quad \Phi_\nu(\varphi) &= L_{s\nu}^{(2m+1)}(\varphi) = \sum_{i=0}^{\infty} B_{2i+1} \sin(2i+1)\varphi & m = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{A2.1.2})$$

In dieser Notation der Funktionen gibt der obere Index die Anzahl der Null-

²³Wir halten uns hier an die in [29] benutzte Notation.

stellen der Funktion in dem halboffenen Intervall $[0, \pi)$ an.

Neben dieser Darstellung wird häufig noch eine zweite Form der Reihenentwicklung der periodischen Laméschen Funktionen benutzt ([29]):

$$\begin{aligned}
 I. \quad \Phi_\nu(\varphi) &= L_{c\nu}^{(2m)}(\varphi) = \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi} \sum_{i=0}^{\infty} C_{2i} \cos 2i\varphi \\
 II. \quad \Phi_\nu(\varphi) &= L_{c\nu}^{(2m+1)}(\varphi) = \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi} \sum_{i=0}^{\infty} C_{2i+1} \cos (2i+1)\varphi \\
 III. \quad \Phi_\nu(\varphi) &= L_{s\nu}^{(2m)}(\varphi) = \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi} \sum_{i=1}^{\infty} D_{2i} \sin 2i\varphi \\
 IV. \quad \Phi_\nu(\varphi) &= L_{s\nu}^{(2m+1)}(\varphi) = \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi} \sum_{i=1}^{\infty} D_{2i+1} \sin (2i+1)\varphi
 \end{aligned} \tag{A2.1.3}$$

Diese zweite Darstellung liefert dieselben Funktionen wie die erste. Sie erweist sich allerdings als nützlich bei der Auswertung von Integralen, die neben den periodischen Laméschen Funktionen auch den Faktor $(1 - k'^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}$ enthalten.

Die Koeffizienten der Reihenentwicklungen von Φ_ν erhält man mit Hilfe von Rekursionsgleichungen, die sich durch Einsetzen der Reihen in die Differentialgleichung A2.1.1 ergeben. Dieses Lösungsverfahren ist ausführlich in [29, Anhang 2] beschrieben. Wir können uns deshalb auf die Darstellung einiger Ergebnisse beschränken, die im Zusammenhang mit den hier untersuchten Randwertproblemen von Interesse sind.

Die Reihenansätze nach Gl. A2.1.2 bzw. A2.1.3 sind nur dann eine Lösung der Laméschen Differentialgleichung, wenn die Separationskonstante λ für jeden Funktionstyp und für jeden Wert von m eine bestimmte, stetige Funktion der Separationskonstanten ν ist. Es ergibt sich somit für jeden Funktionstyp eine Schar sogenannter Eigenwertkurven in der (ν, λ) -Ebene, auf denen eine periodische Lösung von Gl. A2.1.1 existiert. Berücksichtigt man zusätzlich die Ungleichung

$$0 \leq \lambda \leq \nu(\nu + 1) \quad , \tag{A2.1.4}$$

die aus der Randbedingung für die nicht-periodische Lamésche Funktion $\Theta_\nu(\vartheta)$ folgt [34], so erhält man eine Anordnung von Eigenwertkurven, wie sie exemplarisch für Funktionstyp I und $k^2 = 1/3$ in Abb. A2.1.1 gezeigt ist. In Abb. A2.1.2 sind die zugehörigen periodischen Laméschen Funktionen für $\nu = 6.3$ dargestellt.

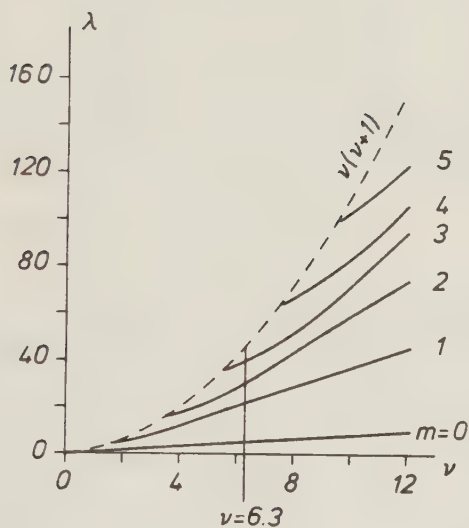


Abbildung A2.1.1: Verlauf der Eigenwertkurven $\lambda(\nu)$ für Funktionstyp I und $k^2 = 1/3$

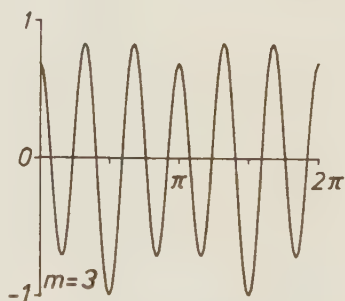
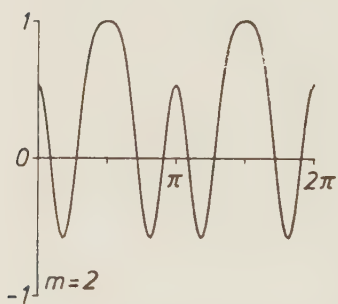
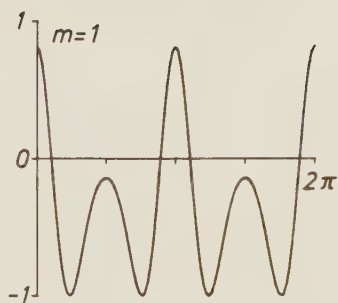
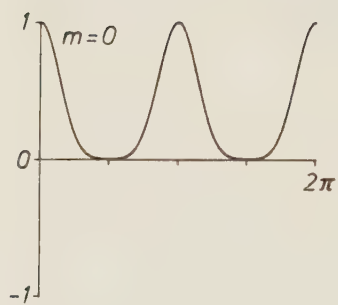


Abbildung A2.1.2: Periodische Lamésche Funktion bei $\nu = 6.3$
(Funktionstyp I, $k^2 = 1/3$)

Der genaue Verlauf der Eigenwertkurven hängt von dem Funktionstyp und dem Systemparameter k'^2 ab. Bei allen Funktionstypen ist allerdings das asymptotische Verhalten dieser Eigenwertkurven für große ν gleich. Für $k' \neq 0$ findet man ([6],[31])

$$\lambda \rightarrow k' \sqrt{\nu(\nu+1)}(2l+1) \quad (\text{A2.1.5})$$

für $\nu \rightarrow \infty$. Dabei ist l eine natürliche Zahl, die mit der Ordnung m der Eigenwertkuve anwächst.

Für $k' = 0$ (rotationssymmetrischer Fall) sind die Eigenwertkurven parallel zu der ν -Achse, λ wird also unabhängig von ν . Der Wert von λ kann dann zu

$$\lambda = \begin{cases} (2m)^2 & \text{für Funktionstyp I und III} \\ (2m+1)^2 & \text{für Funktionstyp II und IV} \end{cases}$$

angegeben werden. In der zugehörigen Reihenentwicklung nach Gl. A2.1.2 oder A2.1.3 ist dann nur der Koeffizient mit $i = m$ von Null verschieden, so daß sich die zugehörige Lamésche Funktion wie erwartet als harmonische Funktion $\cos m\varphi$ bzw. $\sin m\varphi$ darstellen läßt.

Der andere Grenzfall, nämlich $k' = 1$ (Keilgeometrie), ist nur als Grenzwert in der beschriebenen Theorie enthalten, da die Fourierentwicklungen der Laméschen Funktionen in diesem Fall nicht konvergieren ([34]). Hier ist also eine andere Lösungstheorie anzuwenden ([5]).

Die harmonischen Funktionen, die im Fall $k' = 0$ als Lösungsfunktionen auftreten, sind bekanntlich zueinander orthogonal. In dem Fall $k' > 0$ kann eine solche Relation zwischen den periodischen Laméschen Funktionen — mit Einschränkungen — ebenfalls formuliert werden. Seien $f_1(\varphi)$ und $f_2(\varphi)$ zwei periodische Lamésche Funktionen, dann gilt

$$\int_0^{2\pi} \frac{f_1(\varphi)f_2(\varphi)}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = 0 \quad , \quad (\text{A2.1.6})$$

wenn f_1 und f_2 sich im Funktionstyp unterscheiden, oder wenn bei gleichem Funktionstyp und gleichem ν die Funktionen zu verschiedenen Eigenwertkurven gehören. Bei gleichem Typ und unterschiedlichem ν kann dagegen keine Orthogonalitätsrelation zwischen den Funktionen formuliert werden.

Die Orthogonalität der periodischen Funktionen ist unabhängig von der Randbedingung, der die nicht-periodischen Laméschen Funktionen genügen, gilt

also auch für Eigenwerte, die nicht die Ungleichung A2.1.4 erfüllen. Einen Beweis hierzu findet man z.B. in [34].

A2.2 Die nicht-periodischen Laméschen Funktionen

In Kap. 3.2 haben wir festgestellt, daß bei jedem Lösungstyp nach Tab. 3.2.1 Symmetriebedingungen sowohl an die periodische Funktion $\Phi_\nu(\varphi)$ als auch an die nicht-periodische Funktion $\Theta_\nu(\vartheta)$ zu stellen sind. Zudem sind wir nur an solchen Funktionspaaren (Θ_ν, Φ_ν) interessiert, die als Produkt eine Lösung des Randwertproblems liefern. Die Separationskonstante $\lambda(\nu)$ muß deshalb für beide Funktionen die gleiche sein.

Es werden somit Lösungen der Differentialgleichung

$$\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \vartheta} \frac{d}{d\vartheta} \left[\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \vartheta} \frac{d\Theta_\nu}{d\vartheta} \right] + [\nu(\nu + 1)(1 - k^2 \cos^2 \vartheta) - \lambda] \Theta_\nu = 0 \quad (\text{A2.2.1})$$

zu den gleichen Eigenwertkurven gesucht, wie sie in dem Abschnitt über periodische Lamésche Funktionen vorgestellt wurden.

Zu jedem Funktionstyp nach Tab. 3.2.1 kann nun diejenige Lösung von Gl. A2.2.1, die die Eindeutigkeitsbedingung bei $\vartheta = 0$ erfüllt, als Summe über zugeordnete Legendrefunktionen 1. Art dargestellt werden. Man erhält so für $\Theta_\nu(\vartheta)$ die Reihenentwicklungen

$$\begin{aligned} I. \quad L_{cp\nu}^{2m}(\vartheta) &= \sum_{i=0}^{\infty} T(2i) A_{2i} P_\nu^{2i}(\cos \vartheta) \\ II. \quad L_{cp\nu}^{2m+1}(\vartheta) &= \sum_{i=0}^{\infty} T(2i+1) A_{2i+1} P_\nu^{2i+1}(\cos \vartheta) \\ III. \quad L_{sp\nu}^{2m}(\vartheta) &= \frac{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \vartheta}}{\sin \vartheta} \sum_{i=1}^{\infty} 2i T(2i) A_{2i} P_\nu^{2i}(\cos \vartheta) \\ IV. \quad L_{sp\nu}^{2m+1}(\vartheta) &= \frac{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \vartheta}}{\sin \vartheta} \sum_{i=0}^{\infty} (2i+1) T(2i+1) A_{2i+1} P_\nu^{2i+1}(\cos \vartheta) \end{aligned} \quad (\text{A2.2.2})$$

mit

$$T(i) = -(\nu - i)(\nu + i + 1)T(i + 2) \quad , \quad T(0) = T(1) = 1 \quad .$$

Der Index m läuft dabei für Funktionstyp *I, II* und *IV* von 0 bis Unendlich und für Funktionstyp *III* von 1 bis Unendlich.

Durch Einsetzen dieser Reihen in Gl. A2.2.1 kann gezeigt werden, daß die Koeffizienten A_i bzw. B_i in diesen Entwicklungen genau denselben Rekursionsgleichungen genügen müssen, wie die Koeffizienten der Fourierentwicklung der entsprechenden periodischen Laméschen Funktionen [29]. Da aus diesen Rekursionsgleichungen auch die Eigenwertkurven $\lambda(\nu)$ resultieren, stellen die Produkte $\Theta_\nu(\vartheta)\Phi_\nu(\varphi)$ die gesuchten Lösungen des Ausgangsproblems dar. Die Reihenentwicklungen der nicht-periodischen Funktionen konvergieren allerdings nicht in dem gesamten Lösungsgebiet $0 \leq \vartheta \leq \vartheta_0$, wenn ϑ_0 größer als $\pi/2$ ist. Der Konvergenzbereich ist vielmehr auf das Intervall

$$[0, \arccos(-k))$$

beschränkt, dessen obere Grenze zwischen $\pi/2$ und ϑ_0 liegt.

Zudem ist das einzige, derzeit bekannte Verfahren zur schnellen und numerisch stabilen Berechnung der Legendrefunktionen mit reellem unteren Index, nämlich die Rückwärtsrekursion [26], nur in dem Bereich $0 \leq \vartheta < \pi/2$ anwendbar. Wir gehen bei der Berechnung der nicht-periodischen Laméschen Funktion für $\vartheta \geq \pi/2$ deshalb so vor, daß wir zunächst die Werte der Funktion und ihrer Ableitung bei $\vartheta = \pi/2$ aus den Reihenentwicklungen nach Gl. A2.2.2 und einer expliziten Darstellung der Legendrefunktionen [41] bestimmen und dann, ausgehend von diesen Startwerten, die Differentialgleichung A2.2.1 numerisch integrieren. Für $\vartheta < \pi/2$ können die Reihenentwicklungen direkt ausgewertet werden.

Es steht somit ein Verfahren zur Verfügung, mit dem die nicht-periodischen Laméschen Funktionen, bei beliebiger Wahl der Separationskonstanten ν , in dem gesamten Lösungsgebiet berechnet werden können. Der Parameter ν ist nun so zu wählen, daß die durch das Randwertproblem auf dem Kegelmantel vorgegebene Randbedingung erfüllt ist. Es sei an dieser Stelle noch erwähnt, daß eine zu Gl. A2.1.6 äquivalente Orthogonalitätsrelation für die nicht-periodischen Laméschen Funktionen nicht formuliert werden kann, da hier entweder die Funktionen unterschiedlichen Randbedingungen genügen oder, wenn sie derselben Bedingung genügen, sie zu verschiedenen ν und verschiedenen λ gehören.

A2.3 Bestimmung der Eigenwerte des Randwertproblems

Bei den hier untersuchten Problemen werden Lösungen der Helmholtzgleichung gesucht, die auf dem Kegelmantel $\vartheta = \vartheta_0$ gewissen Randbedingungen genügen. Wir haben in Kap. 3.2 gezeigt, daß diese Randbedingungen erfüllt sind, wenn die nicht-periodischen Laméschen Funktionen der Dirichlet-Bedingung

$$\Theta_\nu(\vartheta)|_{\vartheta=\vartheta_0} = 0 \quad (\text{A2.3.1})$$

bzw. der v. Neumann-Bedingung

$$\left. \frac{d\Theta_\nu(\vartheta)}{d\vartheta} \right|_{\vartheta=\vartheta_0} = 0 \quad (\text{A2.3.2})$$

genügen. In [34] ist gezeigt, daß die Eigenwerte zu diesen Randbedingungen eine abzählbare Menge

$$\nu = p_i > 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad \text{Dirichlet-Bedingung}$$

bzw.

$$\nu = q_i > 0, \quad i = 1, 2, 3, \dots \quad \text{v. Neumann-Bedingung}$$

bilden.

Zur Bestimmung der Eigenwerte p_i bzw. q_i betrachten wir längs der einzelnen Eigenwertkurven den Wert der Laméschen Funktion respektive ihrer Ableitung an der Stelle ϑ_0 als Funktion von ν und bestimmen dann mit Hilfe eines numerischen Verfahrens, das in [29, Kap. 2.2.2] ausführlich beschrieben ist, die Nullstellen dieser Funktion. Die Verteilung der so erhaltenen Eigenwerte in der (ν, λ) -Ebene zeigt Abb. A2.3.1 am Beispiel von Funktionstyp I und einem Kegel mit den Öffnungswinkeln $\alpha_{\min} = 30^\circ$ und $\alpha_{\max} = 60^\circ$ ($k^2 = 1/3, \vartheta_0 = 5\pi/6$). Die zugehörigen Eigenfunktionen $\Theta_\nu(\vartheta)$ sind für die ersten Eigenwerte auf der Eigenwertkurve niedrigster Ordnung in Abb. A2.3.2 dargestellt.

An der Verteilung der Eigenwerte in Abb. A2.3.1 fällt zunächst auf, daß längs einer Eigenwertkurve $\lambda(\nu)$ immer abwechselnd ein Eigenwert zur Dirichlet- und ein Eigenwert zur v. Neumann-Bedingung auftreten. Das Randwertproblem weist somit Eigenschaften eines Sturm-Liouville-Problems auf ([45,

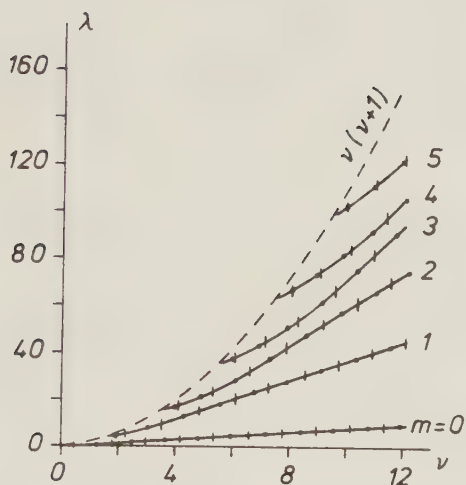


Abbildung A2.3.1: Verteilung der Eigenwerte bei Funktionstyp I für einen Kegel mit den Öffnungswinkeln $\alpha_{\min} = 30^\circ$ und $\alpha_{\max} = 60^\circ$.

Dirichlet-Bedingung +
v. Neumann-Bedingung •

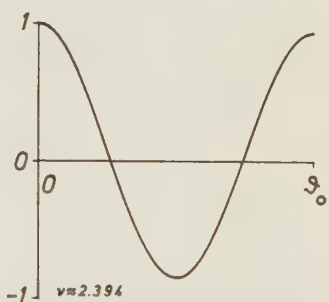
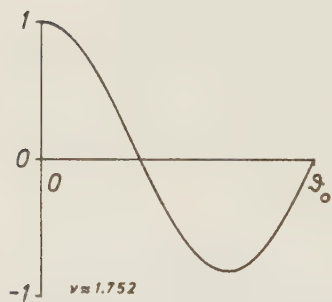
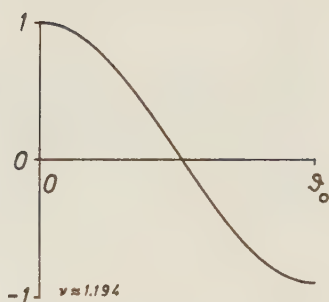
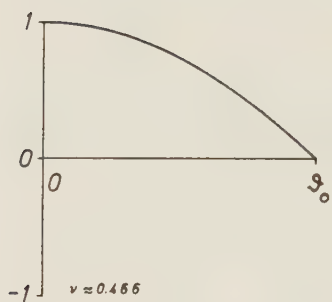


Abbildung A2.3.2: Eigenfunktionen $\Theta_\nu(\psi)$ zu den ersten Eigenwerten auf der niedrigsten Eigenwertkurve.
Funktionstyp I, $\alpha_{\min} = 30^\circ$, $\alpha_{\max} = 60^\circ$

Kap. 6.3]), obwohl es sich hier wegen der nichtlinearen Funktion $\lambda(\nu)$ nicht um ein Sturm-Liouville-Problem im strengen Sinn handelt.

Weiterhin ist zu erkennen, daß mit wachsender Ordnung der Eigenwertkurve die ersten Eigenwerte immer dichter zusammenrücken. Für Eigenwertkurven sehr hoher Ordnung wird also das hier verwendete Verfahren zur Lösung des Randwertproblems numerisch instabil, da die Eigenwerte am Anfang dieser Kurven numerisch nicht mehr voneinander zu unterscheiden sind. Da dieses Verhalten aber nur bei Eigenwertkurven sehr großer Ordnung auftritt, spielt diese Einschränkung bei den hier betrachteten Randwertproblemen keine wesentliche Rolle.

Für große ν , also in einiger Entfernung von dem Anfang einer Eigenwertkurve, rücken die Eigenwerte auseinander, bis sie schließlich in ungefähr konstanten Abständen aufeinander folgen. Dieses asymptotische Verhalten wollen wir mit Hilfe der Differentialgleichung A2.2.1 näher untersuchen, da mit dem Ergebnis dieser Rechnung die Plausibilität der numerisch gewonnenen Daten überprüft werden kann und man auf diese Art auch eine einfache, grobe Näherung für die nicht-periodischen Laméschen Funktionen für große ν gewinnt. Zudem wird auf das Ergebnis dieser Rechnung in Kap. 5.3 Bezug genommen. In Anlehnung an das bei der asymptotischen Berechnung der Eigenwerte eines Sturm-Liouville-Problems üblicherweise benutzte Verfahren ([45]) setzen wir zunächst die Substitution

$$u(\vartheta) = (1 - k^2 \cos^2 \vartheta)^{\frac{1}{4}} \Theta_\nu(\vartheta) \quad (\text{A2.3.3})$$

an. Es gilt dann

$$\frac{d\Theta_\nu}{d\vartheta} = -\frac{1}{2} \frac{k^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{(1 - k^2 \cos^2 \vartheta)^{\frac{1}{4}}} \Theta_\nu(\vartheta) + (1 - k^2 \cos^2 \vartheta)^{-\frac{1}{4}} \frac{du(\vartheta)}{d\vartheta}$$

und damit

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{d\vartheta} \left[\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \vartheta} \frac{d\Theta_\nu}{d\vartheta} \right] &= \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{d}{d\vartheta} \left[\frac{k^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{(1 - k^2 \cos^2 \vartheta)^{\frac{3}{2}}} \right] u - \frac{1}{2} \left[\frac{k^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{(1 - k^2 \cos^2 \vartheta)^{\frac{3}{2}}} \right] \frac{du}{d\vartheta} \\
 &\quad + \frac{1}{2} \left[\frac{k^2 \sin \vartheta \cos \vartheta}{(1 - k^2 \cos^2 \vartheta)^{\frac{3}{2}}} \right] \frac{du}{d\vartheta} + (1 - k^2 \cos^2 \vartheta)^{\frac{1}{2}} \frac{d^2 u}{d\vartheta^2} \\
 &= -\frac{d^2}{d\vartheta^2} \left[(1 - k^2 \cos^2 \vartheta)^{\frac{1}{2}} \right] u(\vartheta) + (1 - k^2 \cos^2 \vartheta)^{\frac{1}{2}} \frac{d^2 u(\vartheta)}{d\vartheta^2}
 \end{aligned}$$

Als Differentialgleichung für $u(\vartheta)$ erhält man dann

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 u}{d\vartheta^2} + \left\{ \nu(\nu + 1) - \frac{\lambda}{(1 - k^2 \cos^2 \vartheta)^{\frac{3}{2}}} \right. \\
 \left. - \frac{1}{(1 - k^2 \cos^2 \vartheta)^{\frac{3}{2}}} \frac{d^2}{d\vartheta^2} \left[(1 - k^2 \cos^2 \vartheta)^{\frac{1}{2}} \right] \right\} u = 0 \quad .
 \end{aligned}$$

Für große ν ist der erste Term in der geschweiften Klammer dominant (s. auch A2.1.5) und ungefähr gleich ν^2 , so daß man für die Näherung $\bar{u}$ von u die Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \bar{u}(\vartheta)}{d\vartheta^2} + \nu^2 \bar{u}(\vartheta) = 0 \quad (\text{A2.3.4})$$

erhält. Diese Differentialgleichung hat die allgemeine Lösung

$$\bar{u}(\vartheta) = A \sin \nu \vartheta + B \cos \nu \vartheta \quad ,$$

so daß man schreiben kann

$$\Theta_\nu(\vartheta) \rightarrow (1 - k^2 \cos^2 \vartheta)^{-\frac{1}{2}} [A \sin \nu \vartheta + B \cos \nu \vartheta] \quad ,$$

für $\nu \rightarrow \infty$.

Um mit Hilfe dieser Näherung eine Abschätzung des asymptotischen Verhaltens der Eigenwerte zu gewinnen, müssen nun die Randbedingungen für $\Theta_\nu(\vartheta)$ berücksichtigt werden. Wir wollen diese Rechnung hier nur für Funktionstyp I durchführen, da sie für die anderen Funktionstypen analog erfolgt und zu demselben Ergebnis führt.

Für Funktionstyp I gilt bei $\vartheta = 0$ die Eindeutigkeitsbedingung

$$\left. \frac{d\Theta_\nu(\vartheta)}{d\vartheta} \right|_{\vartheta=0} = 0 \quad ,$$

so daß sich für die Näherung $\bar{\Theta}_\nu$ der Laméschen Funktion

$$\bar{\Theta}_\nu(\vartheta) = B(1 - k^2 \cos^2 \vartheta)^{-\frac{1}{2}} \cos \nu \vartheta \quad (\text{A2.3.5})$$

ergibt. Für die Eigenwerte p_i zur Dirichlet-Bedingung folgt damit sofort

$$p_i \approx (m + \frac{1}{2}) \frac{\pi}{\vartheta_0} \quad , \quad m \in \mathcal{N} \quad , \quad (\text{A2.3.6})$$

so daß man für die Differenz Δp zweier benachbarter Eigenwerte auf einer Eigenwertkurve erhält

$$\Delta p \approx \frac{\pi}{\vartheta_0} \quad . \quad (\text{A2.3.7})$$

Zur Bestimmung der Eigenwerte zur v. Neumann-Bedingung muß Gl. A2.3.5 zunächst nach ϑ differenziert und dann an der Stelle ϑ_0 zu Null gesetzt werden. Man erhält dann die Gleichung

$$\frac{1}{2} k^2 \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 \cos q_i \vartheta_0 - q_i (1 - k^2 \cos^2 \vartheta) \sin q_i \vartheta_0 = 0 \quad . \quad (\text{A2.3.8})$$

Sei nun $q_i + \Delta q$ der zu q_i nächst benachbarte Eigenwert zur v. Neumann-Bedingung auf derselben Eigenwertkurve. Dann gilt für diesen

$$\frac{1}{2} k^2 \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 \cos (q_i + \Delta q) \vartheta_0 - (q_i + \Delta q) (1 - k^2 \cos^2 \vartheta) \sin (q_i + \Delta q) \vartheta_0 = 0$$

Da $q_i \gg \Delta q$ ist, kann in dem Vorfaktor des zweiten Terms Δq vernachlässigt werden, und man erhält mit Hilfe der Additionstheoreme der trigonometrischen Funktionen die Gleichung

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} k^2 \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 \cos q_i \vartheta_0 \cos \Delta q \vartheta_0 - \frac{1}{2} k^2 \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 \sin q_i \vartheta_0 \sin \Delta q \vartheta_0 \\ & - q_i (1 - k^2 \cos^2 \vartheta) \sin q_i \vartheta_0 \cos \Delta q \vartheta_0 - q_i (1 - k^2 \cos^2 \vartheta) \cos q_i \vartheta_0 \sin \Delta q \vartheta_0 = 0 \end{aligned}$$

Der erste und dritte Term auf der linken Seite ergeben nach Gl. A2.3.8 zusammen Null, so daß für Δq die Bestimmungsgleichung

$$-\left(\frac{1}{2}k^2 \sin \vartheta_0 \cos \vartheta_0 \sin q_i \vartheta_0 + q_i(1 - k^2 \cos^2 \vartheta) \cos q_i \vartheta_0\right) \sin \Delta q = 0$$

resultiert.

Die kleinste nichttriviale Lösung dieser Gleichung ist

$$\Delta q \approx \frac{\pi}{\vartheta_0} \quad , \quad (\text{A2.3.9})$$

wobei dies natürlich nur als Näherung der Differenz benachbarter Eigenwerte bei großen q_i zu verstehen ist.

Die angegebene Näherung für die Differenz benachbarter Eigenwerte gilt umso besser, je weiter die Eigenwerte von dem Anfang der Eigenwertkurve entfernt sind. Bei Eigenwertkurven niedriger Ordnung ist die Näherung offensichtlich schon relativ früh gültig (Abb. A2.3.1). Bei Eigenwertkurven hoher Ordnung muß dagegen ν sehr groß gewählt werden, damit diese Näherung angewendet werden kann. Dies liegt zum einen daran, daß diese Eigenwertkurven erst bei größeren Werten von ν beginnen. Zum anderen haben sie asymptotisch eine größere Steigung als diejenigen niedriger Ordnung (s. Gl. A2.1.5), weshalb die genäherte Differentialgleichung A2.3.4 erst für sehr große ν gilt.

A3 Lamésche Polynome

Neben den in Anhang 2 vorgestellten Lösungen der Laméschen Differentialgleichungen zu vorgegebenen Randbedingungen auf dem Kegelmantel werden gelegentlich auch solche Lösungen benötigt, die auf der gesamten Oberfläche der Einheitskugel stetig und differenzierbar sind. Bei der Berechnung dieser Lösungsfunktionen können die in Kap. 3.2 und in Anhang 2 vorgestellten Methoden weitgehend benutzt werden. Es ist lediglich die Randbedingung für die nicht-periodische Lamésche Funktion zu ersetzen durch die Eindeutigkeitsbedingung auf dem Sektor $\vartheta = \pi$, die in Kap. 3.2 hergeleitet ist.

Man kann nun zeigen ([29]), daß in diesem Fall die Separationskonstante ν eine natürliche Zahl

$$\nu = n, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

sein muß. Für die Laméschen Funktionen kann unter dieser Voraussetzung immer eine endliche Reihenentwicklung gefunden werden. Man nennt diese Funktionen deshalb auch Lamésche Polynome.

Die Entwicklung der nicht-periodischen Funktionen nach zugeordneten Legendrefunktionen (Gl. A2.2.2) bricht für $\nu = n$ immer an der Stelle ²⁴

$$N = \left[\frac{n}{2} \right] \quad \text{Funktionstyp I und III}$$

bzw.

(A3.1)

$$M = \left[\frac{n-1}{2} \right] \quad \text{Funktionstyp II und IV}$$

ab.

Bei den periodischen Funktionen liefert immer nur eine der beiden Fourierentwicklungen (Gl. A2.1.2 oder A2.1.3) eine abbrechende Reihendarstellung, während in der jeweils anderen Entwicklung nach wie vor unendlich viele Terme zu berücksichtigen sind. Welche der beiden Entwicklungen abbricht, hängt dabei von dem Funktionstyp und von n ab.

Zu jedem Funktionstyp und jedem Eigenwert $n = 1, 2, 3, \dots$ existiert nun eine bestimmte Anzahl von Laméschen Produkten, die das Randwertproblem lösen. Die Anzahl dieser Entartungen ist gleich der Anzahl der Eigenwertkurven an der Stelle n (s. Kap. A2.1). Wir kennzeichnen daher die Laméschen

²⁴Mit $[i]$ ist hier die größte ganze Zahl kleiner oder gleich i gemeint.

Polynome mit den zusätzlichen Indizes m und t und schreiben

$$Y_{n,m,t}(\vartheta, \varphi) = \Theta_{n,m,t}(\vartheta) \Phi_{n,m,t}(\varphi) \quad . \quad (\text{A3.2})$$

Der Index m zählt dabei die Ordnung der Eigenwertkurve und t den Funktionstyp.

Tabelle A3.1 gibt eine Übersicht über die resultierenden endlichen Reihenentwicklungen der Laméschen Polynome. Die nicht abbrechende Darstellung der periodischen Funktionen ist dort nicht aufgeführt, sie kann Gl. A2.1.2 bzw. A2.1.3 entnommen werden.

Aus den Reihenentwicklungen können mit Hilfe der Symmetrieeigenschaften der zugeordneten Legendrefunktionen ([1]) entsprechende Symmetrieeigenschaften der Laméschen Polynome in ϑ abgeleitet werden. Man findet, daß die Laméschen Polynome immer gerade oder ungerade symmetrisch zu $\vartheta = \pi/2$ sind. Es gilt

$$\Theta_{n,m,t}(\vartheta) = (-1)^{n+m} \Theta_{n,m,t}(\pi - \vartheta) \quad \text{für } t = 1, 2, 3, 4 \quad (\text{A3.3})$$

Neben den Symmetrieeigenschaften spielt bei der Behandlung von Randwertproblemen die Orthogonalität der Laméschen Polynome eine zentrale Rolle. Man findet in diesem Zusammenhang ([29, Anhang 3], [34, Kap. 2.3]), daß Orthogonalitätsrelationen sowohl für die Laméschen Produkte $Y_{n,m,t}$ als auch für die einzelnen Laméschen Polynome formuliert werden können. Im einzelnen gilt

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} Y_{n,m,t}(\vartheta, \varphi) Y_{n',m',t'}(\vartheta, \varphi) s_\vartheta s_\varphi d\vartheta d\varphi = \delta_{nn'} \delta_{mm'} \delta_{tt'} \quad , \quad (\text{A3.4})$$

sowie

$$\int_0^{2\pi} \frac{\Phi_{n,m,t}(\varphi) \Phi_{n,m',t'}(\varphi)}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = 0 \quad \text{für } m \neq m' \text{ und } t \neq t' \quad (\text{A3.5})$$

und

$$\int_0^\pi \frac{\Theta_{n,m,t}(\vartheta) \Theta_{n,m',t'}(\vartheta)}{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \vartheta}} d\vartheta = 0 \quad \text{für } m \neq m' \text{ und } t \neq t' \quad (\text{A3.6})$$

Funktionstyp I		
$\Phi_{n,m,1}(\varphi) = \sum_{i=0}^N A_{2i} \cos 2i\varphi$		$n = 2, 4, 6, \dots$
$\Phi_{n,m,1}(\varphi) = \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi} \sum_{i=0}^N C_{2i} \cos 2i\varphi$		$n = 1, 3, 5, \dots$
$\Theta_{n,m,1}(\vartheta) = \sum_{i=0}^N T(2i) A_{2i} P_n^{2i}(\cos \vartheta)$		$n = 1, 2, 3, \dots$
$m = 0, 1, \dots, N \quad ; \quad N = \left[\frac{n}{2} \right]$		
Funktionstyp II		
$\Phi_{n,m,2}(\varphi) = \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi} \sum_{i=0}^M C_{2i+1} \cos (2i+1)\varphi$		$n = 2, 4, 6, \dots$
$\Phi_{n,m,2}(\varphi) = \sum_{i=0}^M A_{2i+1} \cos (2i+1)\varphi$		$n = 1, 3, 5, \dots$
$\Theta_{n,m,2}(\vartheta) = \sum_{i=0}^M T(2i+1) A_{2i+1} P_n^{2i+1}(\cos \vartheta)$		$n = 1, 2, 3, \dots$
$m = 0, 1, \dots, M \quad ; \quad M = \left[\frac{n-1}{2} \right]$		

Tabelle A3.1: *Endliche Reihendarstellungen der Laméschen Polynome*

Funktionstyp III	
$\Phi_{n,m,3}(\varphi) = \sum_{i=1}^N B_{2i} \sin 2i\varphi$	$n = 2, 4, 6, \dots$
$\Phi_{n,m,3}(\varphi) = \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi} \sum_{i=1}^N D_{2i} \sin 2i\varphi$	$n = 3, 5, 7, \dots$
$\Theta_{n,m,3}(\vartheta) = \frac{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \vartheta}}{\sin \vartheta} \sum_{i=1}^N 2i T(2i) B_{2i} P_n^{2i}(\cos \vartheta)$	$n = 2, 3, 4, \dots$
$m = 0, 1, \dots, N \quad ; \quad N = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$	
Funktionstyp IV	
$\Phi_{n,m,4}(\varphi) = \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi} \sum_{i=0}^M D_{2i+1} \sin(2i+1)\varphi$	$n = 2, 4, 6, \dots$
$\Phi_{n,m,4}(\varphi) = \sum_{i=0}^M B_{2i+1} \sin(2i+1)\varphi$	$n = 1, 3, 5, \dots$
$\Theta_{n,m,4}(\vartheta) = \frac{\sqrt{1 - k^2 \cos^2 \vartheta}}{\sin \vartheta} \sum_{i=0}^M (2i+1) T(2i+1) B_{2i+1} P_n^{2i+1}(\cos \vartheta)$	$n = 1, 2, 3, \dots$
$m = 0, 1, \dots, M \quad ; \quad M = \left\lfloor \frac{n-1}{2} \right\rfloor$	

Tabelle A3.2: *Endliche Reihendarstellungen der Laméschen Polynome*

Dabei sind diejenigen Laméschen Produkte orthogonal zueinander, die sich im Typ, in der Ordnung der Eigenwertkurve oder in dem Eigenwert n unterscheiden. Dagegen gilt die Orthogonalität der einzelnen Laméschen Polynome nur für Funktionen zu gleichem Eigenwert n und unterschiedlichem Funktionstyp oder unterschiedlicher Ordnung der Eigenwertkurve. In [34] sind noch weitere Orthogonalitätsrelationen aufgeführt, die aber im Zusammenhang mit den hier behandelten Randwertproblemen nicht benötigt werden.

A4 Der Zusammenhang zwischen Laméschen Polynomen und Kugelflächenfunktionen

Bei der Behandlung von Randwertaufgaben in der Beugungstheorie werden neben den Lösungen der Helmholtzgleichung, die auf dem Rand des Lösungsgebietes bestimmten Bedingungen genügen, auch solche Lösungen benötigt, die in dem gesamten freien Raum stetig und differenzierbar sind. Zum Beispiel entwickelt man häufig die auf einen Streukörper einfallende Welle nach solchen Lösungen. Im Fall der elliptischen Kegelkoordinaten sind dies Entwicklungen nach Laméschen Polynomen. Wir werden zeigen, daß eine solche Feldentwicklung immer dann sofort angegeben werden kann, wenn für das zu untersuchende Feld eine Entwicklung in Kugelkoordinaten bereits vorliegt. Für bestimmte Wellenfunktionen, wie z.B. ebene Wellen, sind Multipolentwicklungen des Feldes in Kugelkoordinaten $(r, \bar{\vartheta}, \bar{\varphi})$ (s. Kap. 2.1) bekannt ([33], [58]). In diesem Koordinatensystem wird der r -abhängige Anteil der Partialwellen durch sphärische Zylinderfunktionen beschrieben, und der Transversalanteil durch Kugelflächenfunktionen, die wir hier mit ²⁵

$$\bar{Y}_{n,l}^{(\circ)} = \frac{\sin l\bar{\varphi}}{\cos l\bar{\varphi}} P_n^l(\cos \bar{\vartheta}) \quad . \quad (\text{A4.1})$$

bezeichnen. Letztere genügen der Differentialgleichung

$$(\mathbf{r} \times \nabla)^2 f = -n(n+1)f \quad . \quad (\text{A4.2})$$

Da der Wert des Operators

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} (\mathbf{r} \times \nabla)^2$$

unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems ist, muß der Wert des Operators $(\mathbf{r} \times \nabla)^2$ invariant gegenüber einer Koordinatentransformation sein, bei der die Bedeutung der r -Koordinate erhalten bleibt. Das gleiche gilt auch für den Funktionswert einer physikalisch sinnvollen skalaren Funktion f . Die Kugelflächenfunktionen sind somit auch in elliptischen Kegelkoordinaten eine

²⁵Die Symmetrie der Kugelflächenfunktionen wird hier aus Gründen der Konvention auf $\bar{\varphi} = 0$ bezogen, während sich die Symmetrie der Laméschen Funktionen auf $\varphi = \pi/2$ bezieht.

Lösung von Gl. A4.2. Da aber die Laméschen Produkte $Y_{n,m,t}$ bei festem n eine vollständige orthonormale Basis der quadratintegrablen Lösungen von Gl. A4.2 bilden, kann man die Kugelflächenfunktionen durch eine Summe über Lamésche Produkte zu vorgegebenem n darstellen. Dazu wird der Ansatz

$$\bar{Y}_{n,t}^{(\varphi)}(\bar{\vartheta}, \bar{\varphi}) = \sum_{m,t} a_{nmt} Y_{n,m,t}(\vartheta, \varphi) \quad (\text{A4.3})$$

aufgestellt.

Gleichung A4.3 ist dabei so zu verstehen, daß sie für jeden Punkt P auf der Oberfläche der Einheitskugel gilt, der auf der linken Seite der Gleichung in Kugelkoordinaten und auf der rechten Seite in elliptischen Kegelkoordinaten angegeben wird.

Die Koeffizienten dieser Entwicklung könnten nun mit Hilfe der zweidimensionalen Orthogonalitätsrelation der Laméschen Produkte (Gl. A3.4) direkt berechnet werden. Dies führt allerdings zu einer Darstellung der Koeffizienten durch Integrale, die analytisch nicht weiter ausgewertet werden können. Man greift deshalb hier zu einer speziellen Technik, die wir am Beispiel der Funktion

$$\bar{Y}_{n,1}^{(e)}(\bar{\vartheta}, \bar{\varphi}) = \cos \bar{\varphi} P_n^1(\cos \bar{\vartheta}) \quad (\text{A4.4})$$

darstellen wollen.

Sei zunächst

$$n = 2s + 1 \quad \text{mit} \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

Dann ist die Legendrefunktion eine gerade Funktion zu $\bar{\vartheta} = \pi/2$ ([1, Kap. 8]), so daß gilt

$$P_n^1(0) \neq 0$$

Außerdem ist für $\bar{\vartheta} = \pi/2$ (Ebene $z=0$, s. Kap. 2.1) auch $\vartheta = \pi/2$ und $\bar{\varphi} = \varphi$, so daß man schreiben kann

$$\cos \varphi P_n^1(0) = \sum_{m,t} a_{nmt} \Theta_{n,m,t}\left(\frac{\pi}{2}\right) \Phi_{n,m,t}(\varphi) \quad (\text{A4.5})$$

Multipliziert man diese Gleichung mit

$$\frac{\Phi_{n,m',t'}(\varphi)}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}}$$

und integriert dann von 0 bis 2π über φ , so erhält man mit der Orthogonalitätsrelation der periodischen Laméschen Funktionen (Gl. A3.5)

$$P_n^1(0) \int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi \Phi_{n,m,t}(\varphi)}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = a_{n,m,i} \Theta_{n,m,t}\left(\frac{\pi}{2}\right) \int_0^{2\pi} \frac{[\Phi_{n,m,t}(\varphi)]^2}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi \quad (\text{A4.6})$$

Setzt man nun auf der linken Seite von Gl. A4.6 die Fourierdarstellungen der periodischen Laméschen Funktion Tab. A3.1 ein, so sieht man unmittelbar, daß aufgrund der Orthogonalität der trigonometrischen Funktionen nur der Funktionstyp *II* einen nicht verschwindenden Koeffizienten a_{nm} liefert. Für diesen Funktionstyp sind nun die Integrale auf beiden Seiten von Gl. A4.6 zu berechnen. Hierzu benötigt man beide Reihenentwicklungen der periodischen Laméschen Funktion

$$\begin{aligned} \Phi_{n,m,2}(\varphi) &= \sum_{i=0}^M A_{2i+1} \cos(2i+1)\varphi \\ &= \sqrt{1-k'^2 \sin^2 \varphi} \sum_{i=0}^{\infty} C_{2i+1} \cos(2i+1)\varphi, \end{aligned}$$

damit der Faktor $(1-k'^2 \sin^2 \varphi)^{1/2}$ in den Integranden gekürzt werden kann. Man findet dann

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos \varphi \Phi_{n,m,2}(\varphi)}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi = \pi C_1$$

und

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{[\Phi_{n,m,t}(\varphi)]^2}{\sqrt{1-k'^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi &= \sum_{i=0}^M \sum_{l=0}^{\infty} A_{2i+1} C_{2l+1} \int_0^{2\pi} \cos(2i+1)\varphi \cos(2l+1)\varphi d\varphi \\ &= \pi \sum_{i=0}^M A_{2i+1} C_{2i+1} \end{aligned} \quad (\text{A4.7})$$

Für den Koeffizienten a_{nm2} gilt damit ²⁸

$$a_{nm2} = P_n^1(0) \left[\Theta_{n,m,2}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]^{-1} \frac{C_1}{\sum_{i=0}^M A_{2i+1} C_{2i+1}} \quad (\text{A4.8})$$

²⁸ Aufgrund der Symmetrie von Θ_{nm2} (Gl. A3.3) ist sichergestellt, daß dieser Ausdruck endlich bleibt.

für $n = 2s + 1$, $s = 0, 1, 2, \dots$

Für gerade n , also

$$n = 2(s + 1) \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

verschwindet die Legendrefunktion $P_n^1(u)$ an der Stelle $u = 0$, so daß man Gl. A4.3 zunächst nach ϑ differenzieren muß. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\vartheta} [\cos \bar{\varphi} P_n^1(\cos \bar{\vartheta})] \Big|_{\vartheta=\pi/2} &= \\ \left[P_n^1(0) \frac{d \cos \bar{\varphi}}{d\vartheta} + \cos \bar{\varphi} \frac{d}{d\vartheta} P_n^1(\cos \bar{\vartheta}) \right] \Big|_{\vartheta=\pi/2} &= \\ \cos \varphi \frac{d P_n^1(u)}{du} \Big|_{u=0} \frac{d \cos \bar{\vartheta}}{d\vartheta} \Big|_{\vartheta=\pi/2} \end{aligned}$$

Nun ist aber nach Kap. 2.1 Gl. 2.1.6

$$\cos \bar{\vartheta} = \cos \vartheta \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi} \quad ,$$

so daß man aus Gl. A4.3 erhält

$$-\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi} \cos \varphi \frac{d P_n^1(u)}{du} \Big|_{u=0} = \sum_{m,t} a_{nmt} \frac{d \Theta_{n,m,t}}{d\vartheta} \Big|_{\vartheta=\pi/2} \Phi_{n,m,t}(\varphi) \quad . \quad (\text{A4.9})$$

Nutzt man nun wieder die Orthogonalität der Laméschen Funktionen aus, so erhält man

$$-\frac{d P_n^1(u)}{du} \Big|_{u=0} \int_0^{2\pi} \cos \varphi \Phi_{n,m,t}(\varphi) d\varphi = a_{nmt} \frac{d \Theta_{n,m,t}}{d\vartheta} \Big|_{\vartheta=\pi/2} \int_0^{2\pi} \frac{[\Phi_{n,m,t}(\varphi)]^2}{\sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \varphi}} d\varphi \quad (\text{A4.10})$$

Auf der linken Seite wird nun die Fourierentwicklung der Laméschen Funktion nach Tab. A3.1 eingesetzt. Aufgrund der Orthogonalität der trigonometrischen Funktionen ist dieses Integral wieder nur für Funktionstyp II von Null verschieden. Für diesen Funktionstyp erhält man

$$\int_0^{2\pi} \cos \varphi \Phi_{n,m,2}(\varphi) d\varphi = \pi A_1 \quad . \quad (\text{A4.11})$$

Für das Integral auf der rechten Seite kann das Ergebnis von Gl. A4.7 eingesetzt werden, so daß der Koeffizient a_{nm2} sich zu

$$a_{nm2} = - \frac{dP_n^1(u)}{du} \Big|_{u=0} \left[\frac{d\Theta_{n,m,2}(\vartheta)}{d\vartheta} \Big|_{\vartheta=\pi/2} \right]^{-1} \frac{A_1}{\sum_{i=0}^M A_{2i+1} C_{2i+1}} \quad (\text{A4.12})$$

für

$$n = 2(s+1) \quad , \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

ergibt.

Mit demselben Verfahren kann auch die Entwicklung der Kugelflächenfunktion

$$\bar{Y}_{n,1}^{(o)}(\bar{\vartheta}, \bar{\varphi}) = \sin \bar{\varphi} P_n^1(\cos \bar{\vartheta}) \quad (\text{A4.13})$$

nach Laméschen Produkten hergeleitet werden. In dieser Entwicklung tritt nur der Funktionstyp *IV* auf, so daß die Reihe in der Form

$$\bar{Y}_{n,1}^{(o)}(\bar{\vartheta}, \bar{\varphi}) = \sum_m b_{nm4} \Theta_{n,m,4}(\vartheta) \Phi_{n,m,4}(\varphi) \quad . \quad (\text{A4.14})$$

anzusetzen ist.

Für die Koeffizienten b_{nm4} dieser Entwicklung findet man

$$b_{nm4} = P_n^1(0) \left[\Theta_{n,m,4}\left(\frac{\pi}{2}\right) \right]^{-1} \frac{D_1}{\sum_{i=0}^M B_{2i+1} D_{2i+1}} \quad (\text{A4.15})$$

für

$$n = 2s+1 \quad , \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

und

$$b_{nm4} = - \frac{dP_n^1(u)}{du} \Big|_{u=0} \left[\frac{d\Theta_{n,m,4}(\vartheta)}{d\vartheta} \Big|_{\vartheta=\pi/2} \right]^{-1} \frac{B_1}{\sum_{i=0}^M B_{2i+1} D_{2i+1}} \quad (\text{A4.16})$$

für

$$n = 2(s+1) \quad , \quad s = 0, 1, 2, \dots$$

Die Reihenentwicklungen der Kugelflächenfunktionen höheren Typs können mit dem beschriebenen Verfahren ebenfalls hergeleitet werden. Es ist dabei allerdings noch zwischen Funktionen mit geradem und ungeradem Index l zu unterscheiden.

A5 Herleitung einer Integralbeziehung zwischen den sphärischen Besselfunktionen und Legendrefunktionen

Bei der Lösung des Problems der Beugung einer ebenen Welle an einem semi-infiniten elliptischen Kegel (Kap. 5.1) haben wir zwei Integralbeziehungen benutzt, deren Herleitung wir an dieser Stelle nachholen wollen.

Das erste dieser Integrale ist

$$I_{r_1} := \int_0^{\infty} j_p(\kappa r) e^{-j\kappa ar} dr \quad (\text{A5.1})$$

mit

$$0 < a < 1 \quad \text{und} \quad p > 0.$$

Die Exponentialfunktion in dem Integranden schreibt man zweckmäßig in der Form

$$e^{-j\kappa ar} = \kappa ar \left\{ \frac{\cos \kappa ar}{\kappa ar} - j \frac{\sin \kappa ar}{\kappa ar} \right\}.$$

Nach [1, Gl. 10.1.11+10.1.12] ist aber

$$j_{-1}(x) = \frac{\cos x}{x}$$

und

$$j_0(x) = \frac{\sin x}{x}.$$

Desweiteren sind die sphärischen Besselfunktionen $j_p(x)$ mit den gewöhnlichen Besselfunktionen $J_p(x)$ durch

$$j_p(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2x}} J_{p+\frac{1}{2}}(x)$$

verknüpft ([1, 10.1.1]), so daß das Integral I_{r_1} auch als

$$I_{r_1} = \frac{\pi}{2} \sqrt{a} \left\{ \int_0^{\infty} J_{p+\frac{1}{2}}(\kappa r) J_{-\frac{1}{2}}(\kappa ar) dr - j \int_0^{\infty} J_{p+\frac{1}{2}}(\kappa r) J_{\frac{1}{2}}(\kappa ar) dr \right\} \quad (\text{A5.2})$$

geschrieben werden kann.

Die beiden Integrale in Gl. A5.2 sind vom Typ eines Weber-Schafheitlin-Integrals, das z.B. in [68, Kap. 3.4] ausführlich untersucht wird.²⁷ Dort findet man

$$\int_0^{\infty} \frac{J_{\mu}(c_1 x) J_{\nu}(c_2 x)}{x^{\lambda}} dx = \frac{c_2^{\nu} \Gamma\left(\frac{\mu+\nu-\lambda+1}{2}\right)}{2^{\lambda} c_1^{\nu-\lambda+1} \Gamma(\nu+1) \Gamma\left(\frac{\mu-\nu+\lambda+1}{2}\right)} F\left(\frac{\mu+\nu-\lambda+1}{2}, \frac{\nu-\mu-\lambda+1}{2}; \nu+1; \frac{c_2^2}{c_1^2}\right) \quad (\text{A5.3})$$

mit

$$0 < c_2 < c_1 \quad .$$

Die Größe $F(a, b; c; z)$ steht dabei für die hypergeometrische Reihe und $\Gamma(x)$ für die Gamma-Funktion.

Zur Bestimmung des ersten Integrales in Gl. A5.2 setzt man nun

$$c_1 = \kappa \quad , \quad c_2 = a\kappa \quad , \quad \mu = p + \frac{1}{2} \quad , \quad \nu = -\frac{1}{2} \quad , \quad \lambda = 0$$

und in dem zweiten Integral

$$c_1 = \kappa \quad , \quad c_2 = a\kappa \quad , \quad \mu = p + \frac{1}{2} \quad , \quad \nu = \frac{1}{2} \quad , \quad \lambda = 0 \quad .$$

und erhält

$$I_{r_1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\kappa} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right)} F\left(\frac{p+1}{2}, \frac{-p}{2}; \frac{1}{2}; a^2\right) - 2ja \frac{\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} F\left(\frac{p+2}{2}, \frac{-p+1}{2}; \frac{3}{2}; a^2\right) \right\} \quad (\text{A5.4})$$

²⁷Die dort ebenfalls angeführten Integralformeln von Lipschitz und Hankel können hier nicht verwendet werden, da $a\kappa \leq \kappa$ gilt.

Den ersten Term in diesem Ausdruck erweitern wir mit $\Gamma\left(\frac{-p+1}{2}\right)$, den zweiten Term mit $\Gamma\left(\frac{-p}{2}\right)$, und erhalten so

$$I_{r_1} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\kappa} \left\{ \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{-p+1}{2}\right) A - 2ja \Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{-p}{2}\right) B \right\} \quad (\text{A5.5})$$

mit

$$A = \frac{F\left(\frac{p+1}{2}, \frac{-p}{2}; \frac{1}{2}; a^2\right)}{\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{-p+1}{2}\right)}$$

und

$$B = \frac{F\left(\frac{p+2}{2}, \frac{-p+1}{2}; \frac{3}{2}; a^2\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{-p}{2}\right)}$$

Desweiteren gilt ([1, 6.1.17])

$$\Gamma(z) \Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

und damit

$$\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{-p+1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{p+1}{2}\right) = \frac{\pi}{\cos \frac{p\pi}{2}}$$

sowie

$$\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{-p}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{-p}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{-p}{2}\right) = \frac{-\pi}{\sin \frac{p\pi}{2}}$$

Damit ergibt sich dann

$$\begin{aligned} I_{r_1} &= \frac{\pi\sqrt{\pi}}{2\kappa} \left\{ \frac{1}{\cos \frac{p\pi}{2}} A + 2ja \frac{1}{\sin \frac{p\pi}{2}} B \right\} \\ &= \frac{\pi\sqrt{\pi}}{\kappa} \frac{1}{2 \sin \frac{p\pi}{2} \cos \frac{p\pi}{2}} \left\{ A \sin \frac{p\pi}{2} + 2jaB \cos \frac{p\pi}{2} \right\} \\ &= \frac{\pi\sqrt{\pi}}{\kappa} \frac{1}{\sin p\pi} \left\{ A \sin \frac{p\pi}{2} + 2jaB \cos \frac{p\pi}{2} \right\} \end{aligned}$$

Ersetzt man in der geschweiften Klammer nun die trigonometrischen Funktionen durch Exponentialfunktionen, so erhält man

$$I_{r_1} = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{2j\kappa} \frac{1}{\sin p\pi} \left\{ e^{jp\frac{\pi}{2}}(A - 2aB) - e^{-jp\frac{\pi}{2}}(A + 2aB) \right\} \quad (\text{A5.6})$$

Die Ausdrücke $A - 2aB$ und $A + 2aB$ können als zugeordnete Legendrefunktionen geschrieben werden. Für diese gilt nämlich ([41, S. 167])

$$P_{\nu}^{\mu}(x) = \frac{2^{\mu}\sqrt{\pi}}{(1-x^2)^{\frac{\mu}{2}}} \left\{ \frac{F\left(\frac{-\nu-\mu}{2}, \frac{\nu-\mu+1}{2}; \frac{1}{2}; x^2\right)}{\Gamma\left(\frac{1-\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+2}{2}\right)} - 2x \frac{F\left(\frac{1-\nu-\mu}{2}, \frac{2+\nu-\mu}{2}; \frac{3}{2}; x^2\right)}{\Gamma\left(\frac{-\nu-\mu}{2}\right)\Gamma\left(\frac{\nu-\mu+1}{2}\right)} \right\} \quad (\text{A5.7})$$

Durch Vergleich mit dieser Darstellung findet man dann

$$A - 2aB = \frac{1}{\sqrt{\pi}} P_p(a)$$

und

$$A + 2aB = \frac{1}{\sqrt{\pi}} P_p(-a)$$

und damit endgültig

$$\begin{aligned} I_{r_1} &= \int_0^{\infty} j_p(\kappa r) e^{-j\kappa a r} dr \\ &= \frac{\pi}{2j\kappa} \frac{1}{\sin p\pi} \left\{ e^{jp\frac{\pi}{2}} P_p(a) - e^{-jp\frac{\pi}{2}} P_p(-a) \right\} \end{aligned} \quad (\text{A5.8})$$

Das zweite zu bestimmende Integral ist

$$I_{r_3} := \int_0^{\infty} r j_p(\kappa r) e^{-j\kappa a r} dr \quad (\text{A5.9})$$

Hier geht man im Prinzip genauso vor wie bei dem ersten Integral. Zunächst bringt man das Integral durch Ersetzen der Exponentialfunktion in die Form

$$I_{r_3} = \frac{\pi}{2} \sqrt{a} \left\{ \int_0^{\infty} r J_{p+\frac{1}{2}}(\kappa r) J_{-\frac{1}{2}}(\kappa a r) dr - j \int_0^{\infty} r J_{p+\frac{1}{2}}(\kappa r) J_{\frac{1}{2}}(\kappa a r) dr \right\} \quad (\text{A5.10})$$

und findet dann durch Vergleich mit Gl. A5.3

$$I_{r_3} = \frac{\sqrt{\pi}}{\kappa^2} \left\{ \frac{\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} F\left(\frac{p+2}{2}, \frac{-p+1}{2}; \frac{1}{2}; a^2\right) - 2ja \frac{\Gamma\left(\frac{p+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2}\right)} F\left(\frac{p+3}{2}, \frac{-p+2}{2}; \frac{3}{2}; a^2\right) \right\} \quad (\text{A5.11})$$

Den ersten Term in der geschweiften Klammer erweitert man nun mit

$$\Gamma\left(\frac{p+3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{-p+2}{2}\right)$$

und erhält als Vorfaktor der ersten hypergeometrischen Reihe

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p+3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{-p+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{p+3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{-p+2}{2}\right)}$$

Es gilt nun

$$\frac{\Gamma\left(\frac{p+3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)} = \frac{p+1}{2}$$

und

$$\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{-p+2}{2}\right) = \frac{p}{2} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \Gamma\left(1-\frac{p}{2}\right) = \frac{p}{2} \frac{\pi}{\sin \frac{p\pi}{2}},$$

so daß dieser Vorfaktor erheblich vereinfacht werden kann.

Den zweiten Term in Gl. A5.11 erweitert man mit

$$\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{-p+1}{2}\right)$$

und führt äquivalente Vereinfachungen durch wie bei dem ersten Term. Setzt man die so umgeformten Vorfaktoren wieder in Gl. A5.11 ein und erweitert den gesamten Ausdruck mit

$$\sin \frac{p\pi}{2} \cos \frac{p\pi}{2} = \frac{1}{2} \sin p\pi \quad ,$$

dann ergibt sich

$$I_{r_3} = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{2\kappa^2} \frac{p(p+1)}{\sin p\pi} \left\{ A \cos \frac{p\pi}{2} - 2jaB \sin \frac{p\pi}{2} \right\} \quad (\text{A5.12})$$

mit

$$A = \frac{F\left(\frac{p+2}{2}, \frac{-p+1}{2}; \frac{1}{2}; a^2\right)}{\Gamma\left(\frac{p+3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{-p+2}{2}\right)}$$

und

$$B = \frac{F\left(\frac{p+3}{2}, \frac{-p+2}{2}; \frac{3}{2}; a^2\right)}{\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right) \Gamma\left(\frac{-p+1}{2}\right)} .$$

In Gl. A5.12 ersetzt man in der geschweiften Klammer noch die trigonometrischen Funktionen durch Exponentialfunktionen, so daß man eine Darstellung erhält, die mit Gl. A5.7 verglichen werden kann. Dieser Vergleich liefert hier²⁸

$$\begin{aligned} A - 2aB &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} P_{-p-1}^{-1}(a) \\ &= \frac{-2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} P_p^1(a) \frac{1}{p(p+1)} \end{aligned}$$

und

$$A + 2aB = \frac{-2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} P_p^1(-a) \frac{1}{p(p+1)} ,$$

so daß man schließlich erhält

$$\begin{aligned} I_{r_3} &= \int_0^\infty r j_p(\kappa r) e^{-j\kappa ar} dr \\ &= \frac{-\pi}{2\kappa^2} \frac{1}{\sin p\pi} \frac{1}{\sqrt{1-a^2}} \left\{ e^{jp\frac{\pi}{2}} P_p^1(a) + e^{-jp\frac{\pi}{2}} P_p^1(-a) \right\} \quad . \quad (\text{A5.13}) \end{aligned}$$

²⁸Zu dem Zusammenhang zwischen $P_{-p-1}^{-1}(x)$ und $P_p^1(x)$ s. [41, 2. 170].

Zusammenfassung

Es wird eine Theorie zur Beugung elektromagnetischer Wellen am Kegel elliptischen Querschnitts hergeleitet. Die Lösung des Beugungsproblems erfolgt dabei mit Hilfe der Methode der dyadischen Greenschen Funktion, die eine Integraldarstellung des Beugungsfeldes über seine Quellen und Randwerte liefert. Für die Greensche Dyade wird eine Entwicklung nach divergenzfreien Partikulärlösungen der vektoriellen Helmholtzgleichung hergeleitet. Die dabei benötigte Theorie der Lösung der vektoriellen und der skalaren Helmholtzgleichung in elliptischen Kegelkoordinaten ist in Grundzügen dargestellt.

Bei der Anwendung dieser Theorie wird zunächst die Singularität des elektromagnetischen Feldes an der Spitze des elliptischen Kegels untersucht. Es ergeben sich hier drei Typen von Feldsingularitäten, deren Grad als Funktion der Kegelöffnungswinkel angegeben wird. Die hier gefundenen Werte stimmen mit Angaben aus der Literatur, soweit diese vorliegen, überein.

Mit Hilfe der hergeleiteten Felddarstellung wird das Feld eines Hertzschen Dipols vor einem elliptischen Kegel berechnet. Dabei werden Fernfelddiagramme für verschiedene Abstände des Dipols von der Kegelspitze und verschiedene Hauptöffnungswinkel des elliptischen Kegels vorgestellt. Anhand der Diagramme kann abgelesen werden, daß die erzeugte Welle bei sehr kleinen Dipolabständen zu einem wesentlichen Anteil längs der Oberfläche des Kegels geleitet wird. Bei größeren Dipolabständen treten Abschattungs- und Interferenzeffekte auf. Letztere sind besonders ausgeprägt im Fall der Entartung des elliptischen Kegels zu einer sektorförmigen Fläche, was mit den an den Kanten des Sektors entstehenden Beugungswellen zu erklären ist.

Als Beispiel für eine kompliziertere Stromverteilung wird ein Kreisstrom vor der Spitze des elliptischen Kegels behandelt. Auch hier werden Fernfelddiagramme für verschiedene Kreisdurchmesser angegeben. Bei kleinem Kreisdurchmesser ist das Feld gleich dem eines magnetischen Dipols vor der Spitze des Kegels.

Anstelle einer räumlichen Stromverteilung können auch die Randwerte des Feldes auf dem Kegelmantel als felderzeugende Quellen vorgegeben werden. Als Beispiel wird hier das Feld eines schlitzz gespeisten elliptischen Kegels bzw. Sektors berechnet. Anhand der zugehörigen Fernfelddiagramme kann man ablesen, daß das Feld dieser Anordnung bei kleinen Schlitzabständen von der Kegelspitze gleich dem Feld eines Hertzschen Dipols vor dem Kegel ist.

Dieses Verhalten kann aus der Symmetrie der Anregung erklärt werden. Neben der Strahlungscharakteristik der Anordnung wird hier auch die gesamte abgestrahlte Leistung berechnet, wobei die Orthogonalitätseigenschaften der benutzten Entwicklungsfunktionen ausgenutzt werden können.

Das Problem der Beugung einer ebenen, elektromagnetischen Welle am semi-infiniten Kegel elliptischen Querschnitts kann ebenfalls mittels einer Darstellung des Streufeldes als Integral über seine bekannten Randwerte auf dem Kegelmantel streng gelöst werden. Die dabei auftretenden Integrationen können z.T. geschlossen durchgeführt werden. Die nicht geschlossen angebbaren Integrale müssen hier numerisch berechnet werden, was allerdings aufgrund des langsam veränderlichen Integranden kein wesentliches Problem darstellt. Aus der Lösung des Randwertproblems wird mittels einer speziellen Summationstechnik der Radarrückstreuquerschnitt des semi-infiniten Kegels für kleine Kegelöffnungswinkel berechnet. Der Vergleich mit der physikalisch optischen Näherung zeigt hier, daß diese nur für nahezu rotationssymmetrische Kegel angewendet werden darf. Insbesondere ergeben sich wesentliche Abweichungen von der strengen Theorie im Fall der Entartung des Kegels zu einem Sektor.

In dem letzten Abschnitt wird das Problem der Beugung einer ebenen Welle an einem elliptischen Kegel endlicher Länge behandelt. Das hier benutzte Verfahren erweist sich aber nur im Fall sehr kleiner Kegellängen als anwendbar.

Bibliographie

- [1] Abramowitz, M. , Stegun, I.A. *Handbook of Mathematical Functions*, 9th ed., Dover Publications, New York 1972
- [2] Bailin, L.L., Silver, S., *Exterior Electromagnetic Boundary Value Problems for Spheres and Cones*, IRE Trans. Ant. Prop., Vol. 4, 1956, pp. 5-16
- [3] Bevensee, R.M., *A Handbook of Conical Antennas and Scatterers*, Gordon and Breach Science Publishers, New York- London- Paris 1973
- [4] Blume, S., *Ein numerisches Verfahren zur Berechnung elektromagnetischer Felder an geometrischen Singularitäten*, Kleinheubacher Berichte, Bd. 21, 1978, S. 103-110
- [5] Blume, S., *Eine verzweigte Lösung der Wellengleichung mit punktförmiger Singularität und ihre Anwendung in der Theorie der Beugung am Keil*, Optik, Bd. 26, 1967, S. 69-85
- [6] Blume, S., *Nichtrotationssymmetrische Wellenfelder*, Kleinheubacher Berichte, Bd. 24, 1981, S. 1-16
- [7] Blume, S., *Rückstreuquerschnitte von semi-infiniten Kegeln mit elliptischem Querschnitt*, Zeitschr. f. angew. Phys., Bd. 18(3), 1964, S. 227-230
- [8] Blume, S., *Theorie der Beugung an einem sektorförmigen Schlitz I*, Optik, Bd. 26, 1967, S. 150-168
- [9] Blume, S., *Theorie der Beugung an einem sektorförmigen Schlitz II*, Optik, Bd. 26, 1967, S. 192-210

- [10] Blume, S., *Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen am Kegel elliptischen Querschnitts*, Annalen der Physik, Folge 7, Bd. 26(4), 1971, S. 302-308
- [11] Blume, S., *Theorie elektromagnetischer Felder*, 1. Auflage, Dr. Alfred Hüthig Verlag, Heidelberg 1982
- [12] Blume, S., Grafmüller, B., *Electromagnetic Waves in Conical Waveguides with Elliptic Cross Section*, IEEE Trans. Microwave Th. and Techn., Vol. MTT-34(7), 1986, pp. 835-838
- [13] Blume, S., Grafmüller, B., *Kegelantennen und Hornantennen elliptischen Querschnitts*, Kleinheubacher Berichte, Bd. 28 Teil II, 1985, S. 231-240
- [14] Blume, S., Kahl, G., *Comments on "Fields at the Tip of an Elliptic Cone"*, Proc. IEEE, Vol. 73(12), 1985, pp. 1857-1858
- [15] Blume, S., Kahl, G., *Field Singularities at the Tip of an Elliptic Cone*, Optik, Bd. 70(4), 1985, S. 170-175
- [16] Blume, S., Kahl, G., *The Physical Optics Radar Cross Section of an Elliptic Cone*, IEEE Trans. Ant. Prop., Vol. AP-35, No. 4, April 1987, pp. 457-460
- [17] Blume, S., Kahl, G., *Zur Berechnung des Rückstreuquerschnittes elliptischer Kegel endlicher Länge*, Kleinheubacher Berichte, Bd. 28 Teil II, 1985, S. 203-212
- [18] Blume, S., Kahl, G., Klinkenbusch, L., *Darstellung elektromagnetischer Felder über die dyadische Greensche Funktion und deren Anwendung bei der Lösung von Randwertaufgaben mit elliptischer Kegelgeometrie*, Kleinheubacher Berichte 1987, S. 415-428
- [19] Blume, S., Kirchner, M., *Das Beugungsnahfeld an der Spitze eines sektorförmigen Schlitzes in einem ebenen Schirm*, Optik, Bd. 29, 1969, S. 185-203
- [20] Borgnis, F.E., Papas, C.H., *Randwertprobleme der Mikrowellenphysik*, Springer Verl., Berlin- Göttingen- Heidelberg 1955

- [21] Bowman, J.J., Senior, T.B.A., Uslenghi, P.L.E., *Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shapes*, North- Holland Publishing Comp., Amsterdam 1969
- [22] Chen, H.C., *Theory of Electromagnetic Waves*, McGraw-Hill Book Comp., New York...,1985
- [23] Erdelyi, A., *On Lamé Functions*, Philos. Magazine, Vol. 31, 1941, pp. 123-130
- [24] Erdelyi, A., *On Algebraic Lamé Functions*, Philos. Magazine, Vol. 32, 1941, pp. 348-350
- [25] Erdelyi, A., *Expansion of Lamé Functions into Series of Legendre Functions*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh A, Vol. 62 (1943-49), 1949, pp. 247-267
- [26] Gautschi, W., *Computational aspects of three-term recurrence*, SIAM Review, vol. 9 (1987), pp. 24-82
- [27] Gibbs, J.W., *The Collected Works*, Bd. II, Teil II, Longmans, Green and Co., New York - London - Toronto 1928
- [28] Grafmüller, B., *Die Ern- und Hmn- Moden im Kegelhorn elliptischen Querschnitts*, Kleinheubacher Berichte, Bd. 27, 1984, S. 231-242
- [29] Grafmüller, B., *Kegelhörner und Kegelantennen elliptischen Querschnitts*, Dissertation, Ruhr-Universität Bochum, 1985
- [30] Hohloch, E., *Das Beugungsnahfeld an einfachen und mehrfachen Sektorschirmen*, Dissertation, Eberhard-Karls-Universität, Tübingen 1964
- [31] Ince, E.L., *The Periodic Lamé Functions*, Proc. Roy. Soc Edinburgh, Vol. 60, 1939/40, pp. 47-63
- [32] Ince, E.L., *Further Investigations into the Periodic Lamé Functions*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, Vol. 60, 1940, pp. 83-99
- [33] Jackson, J.D., *Classical Electrodynamics*, John Wiley Sons, Inc., New York- London- Sidney- Toronto 1975

- [34] Jansen, J.K.M., *Simple-Periodic and Non-Periodic Lamé-Functions and their Application in the Theory of Conical Waveguides*, Dissertation, Technische Hogeschool Eindhoven, 1976
- [35] Kirchner, M., *Die Beugung skalarer Wellen am elliptischen Kegel*, Ann. d. Phys., Folge 7, Bd. 26(4), 1971, S. 309-325
- [36] Kirchner, M., *Untersuchungen zur Beugung an einem elliptischen Kegel* Dissertation, Philipps-Universität Marburg/Lahn, 1970
- [37] Klinkenbusch, L., *Die Greensche Dyade des semi-infiniten Kegels mit elliptischem Querschnitt*, Diplomarbeit, Lehrstuhl für Theoretische Elektrotechnik, Ruhr-Universität Bochum, 1986
- [38] Kraus, L., *Diffraction by a Plane Angular Sector*, doctoral dissertation, New York University, 1955
- [39] Kraus, L., Levine, L.M., *Diffraction by an Elliptic Cone*, Comm. Pure Appl. Math., Vol. XIV, 1961, pp. 49-68
- [40] Leroy, M., *On the Convergence of Numerical Results in Modal Analysis*, IEEE Trans. Ant. Prop., Vol. AP-31(4), 1983, pp. 655-659
- [41] Magnus, W., Oberhettinger, F., Soni, R.P., *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics*, 3rd ed., Springer Verlag, New York 1966
- [42] Meixner, J., *Die Kantenbedingung in der Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen an vollkommen leitenden ebenen Schirmen*, Ann. d. Phys., Folge 6 C, 1949, S. 2-9
- [43] Mentzer, J.R., *Scattering and Diffraction of Radio Waves*, Pergamon Press, New York 1955
- [44] Mittra, R., Itoh, T., Li, Ti-Shu, *Analytical and Numerical Studies of the Relative Convergence Phenomenon Arising in the Solution of an Integral Equation by the Moment Method*, IEEE Trans. Microw. Th. Techn., Vol. MTT-20(2), 1972, pp. 96-104
- [45] Morse, P.M., Feshbach, H., *Methods of Theoretical Physics*, McGraw Hill Book Comp., New York- Toronto- London 1953

- [46] Northover, F.H., *The Diffraction of Electromagnetic Waves Around a Finite, Perfectly Conducting Cone*, Quart. Journ. Mech. Appl. Math., Vol. XV Pt. 1, 1962, pp. 1-9
- [47] Pathak, P.H., *On the Eigenfunction Expansion of Electromagnetic Dyadic Green's Functions* IEEE Trans. Ant. Prop., Vol. AP-31, No. 6, 1983, pp. 837-846
- [48] Rogers, C.C., Schindler, J.R., Schultz, F.K., *The Scattering of a Plane Electromagnetic Wave by a Finite Cone*, in E.C. Jordan (ed.), 'Electromagnetic Theory and Antennas', Pt. 1, Proc. of a Symp. held at Copenhagen, Pergamon Press, 1963, pp. 67-80
- [49] Sahalos, J.N., Thiele, G.A., *A Hybrid UTD-Eigenfunction Method for Scattering by a Vertex*, International U.R.S.I. Symp. München, 1980
- [50] Sahalos, J.N., Thiele, G.A., *Periodic Lamé functions an applications to the diffraction by a plane angular sector*, Can. Journ. Phys., Vol. 61, 1983, pp. 1583-1591
- [51] Sahalos, J.N., Thiele, G.A., *The Eigenfunction Solution for Scattered Fields and Surface Currents on a Vertex*, IEEE Trans. Ant. Prop., Vol. AP-31(1), 1983, pp. 206-210
- [52] Satterwhite, R.S., *Diffraction by a Plane Angular Sector*, doctoral dissertation, The Ohio State University, 1969
- [53] Satterwhite, R.S., *Diffraction by a Quarter Plane, the Exact Solution, and Some Numerical Results*, IEEE Trans. Ant. Prop., 1974, pp. 500-503
- [54] Schnizer, B., *Solutions of the Vector Helmholtz Equation and Green's Tensors for the Electromagnetic Field*, Vortrag auf der "Kleinheubacher Tagung", Kleinheubach 1987, (erscheint vor. in Kleinheubacher Berichte 1988)
- [55] Schrott, A., Stein, V., *Moderne numerische Verfahren zur Lösung von Antennen und Streuproblemen*, R. Oldenbourg Verlag, München-Wien 1985

- [56] Severin, H., *Zur Theorie der Beugung elektromagnetischer Wellen*, Zeitschr. f. Phys., Bd. 129, 1951, S. 426-439
- [57] Siegel, K.M., Crispin, J.W., Schensted, C.E., *Electromagnetic and Acoustic Scattering from a Semi-Infinite Cone*, Journ. Appl. Phys., Vol. 26(3), 1955, pp. 309-313
- [58] Stratton, J.A., *Electromagnetic Theory*, 1st ed., McGraw-Hill Book Comp., New York-London 1941
- [59] Strolka, G., *Beugung akustischer Wellen am schallharten bzw. schallweichen Kegel elliptischen Querschnitts*, Diplomarbeit, Lehrstuhl für Theoretische Elektrotechnik, Ruhr-Universität Bochum, 1985
- [60] Vafiadis, E., Sahalos, J.N., *Analysis of semi-infinite elliptical conical scatterer*, Journ. Phys., Pt. D: Appl. Phys., Vol. 18, 1985, pp. 1475-1493
- [61] Vafiadis, E., Sahalos, J.N., *Diffraction by a Perfectly Conducting Elliptic Cone*, Arch. f. Elektrotechnik, Bd. 66, 1983, S. 117-124
- [62] Vafiadis, E., Sahalos, J.N., *Fields at the Tip of an Elliptic Cone*, Proc. IEEE, Vol. 72(8), 1984, pp. 1089-1091
- [63] Vafiadis, E., Sahalos, J.N., *Investigation into Nonperiodic Lamé Functions and Application to Electromagnetic Problems*, Journ. of the Franklin Inst., Vol. 315(3), 1983, pp. 195-210,
- [64] Van Bladel, J., *Electromagnetic Fields*, Hemisphere Publishing Corp., New York- London 1985
- [65] Van Bladel, J., *Field Singularities at the Tip of a Cone*, Proc IEEE, Vol. 71(7), 1983, pp. 901-902
- [66] Van Bladel, J., Desmedt, R., *Field Singularities at Wedges and Tips of Cones*, 'International Symposium on Antennas and Propagation, Japan 1985', Proc. of ISAP'85, 1985, pp. 855-858
- [67] Wang, Dau-Sing, Medgyesi-Mitschang, L.N., *Electromagnetic Scattering from Finite Circular and Elliptic Cones*, IEEE Trans. Ant. Prop., Vol. AP-33(5), 1985, pp.

- [68] Watson, G.N., *A Treatise on the Theory of Bessel Functions*, Cambridge University Press, Cambridge 1966
- [69] Worm, S.C.J., *Corrugated Elliptical Horn Antennas for the Generation of Radiation Patterns with Elliptical Cross-Section*, Dissertation, Technische Hogeschool Eindhoven, 1985
- [70] Zimourtopoulos, P.E., Sahalos, J.N., Thiele, G.A., *Input Impedance of a Monopole Antenna on a Finite Polygonal Ground Plane*, Proc. IEE, Vol. 130 Pt. H (4), 1983, pp. 276-280
- [71] NAG-ALGOL 68 Library Manual, Mark 3, June 1981
- [72] Felsen, L.B., *Backscattering from Wide-Angle and Narrow-Angle Cones*, Journ. Appl. Phys., Vol. 26, No. 2, Febr. 1953, pp. 138-151
- [73] Felsen, L.B., *Plane-Wave Scattering by Small-Angle Cones*, IRE Trans. Ant. Prop., Vol. 5, No. 1, Jan. 1957, pp. 121-129
- [74] Felsen, L.B., Rosenbaum, S., *Ray Optics for Radiation Problems in Anisotropic Regions With Boundaries. 1. Line Source Excitation*, Radio Science, Vol. 2, 1967, pp. 116-130
- [75] Keller, J.B., *Geometrical Theory of Diffraction*, Journ. Opt. Soc. Am., Vol. 52, No. 2, Febr. 1962, pp. 116-130
- [76] Keller, J.B., *Backscattering from a Finite Cone*, IRE Trans. Ant. Prop., March 1960, pp. 175-182

Die vorliegende Arbeit entstand in den Jahren 1982 bis 1988 am Lehrstuhl für Theoretische Elektrotechnik an der Ruhr-Universität Bochum.

Herrn Prof. Dr. S. Blume gilt mein besonderer Dank für die Anregung zu dieser Arbeit und viele Diskussionen.

Ebenso danke ich den Mitarbeitern und Studenten am Lehrstuhl für Theoretische Elektrotechnik, die auf unterschiedliche Weise zu dem Fortgang dieser Arbeit beigetragen haben.

Einige Ergebnisse aus den Diplomarbeiten der Herren L. Klinkenbusch und G. Strolka, an deren Betreuung ich mitgewirkt habe, sind in dieser Arbeit verwendet worden.

Die numerischen Rechnungen wurden an der Rechenanlage des Rechenzentrums der Ruhr-Universität Bochum durchgeführt. Den Mitarbeitern des Rechenzentrums möchte ich an dieser Stelle für die Bereitstellung der Betriebsmittel und die hilfreiche Unterstützung bei deren Nutzung danken.

Herrn Prof. Dr. P. Edenhofer danke ich für die Übernahme des Korreferats.

Die in dieser Arbeit vorgestellten Untersuchungen sind im Rahmen eines von der Deutschen Forschungsgemeinschaft geförderten Forschungsvorhabens durchgeführt worden. Ich möchte der Deutschen Forschungsgemeinschaft für die Unterstützung bei der Durchführung dieser Untersuchungen danken.

Lebenslauf

Gerhard Kahl

3. Oktober 1955	geboren in Herne, Westfalen
1962 bis 1966	Besuch der Volksschule in Bochum
1966 bis 1974	Besuch des Goethe-Gymnasiums in Bochum
11. Juni 1974	Abitur
1974 bis 1976	Wehrdienst
WS 1976/77 bis SS 1982	Studium der Elektrotechnik an der Ruhr-Universität Bochum
24. Juni 1982	Diplom
Juli 1982 bis Juli 1983	Wissenschaftliche Hilfskraft am Lehrstuhl für Theoretische Elektrotechnik an der Ruhr-Universität Bochum
seit dem 1. August 1983	Wissenschaftlicher Mitarbeiter am Lehrstuhl für Theoretische Elektrotechnik an der Ruhr-Universität Bochum

